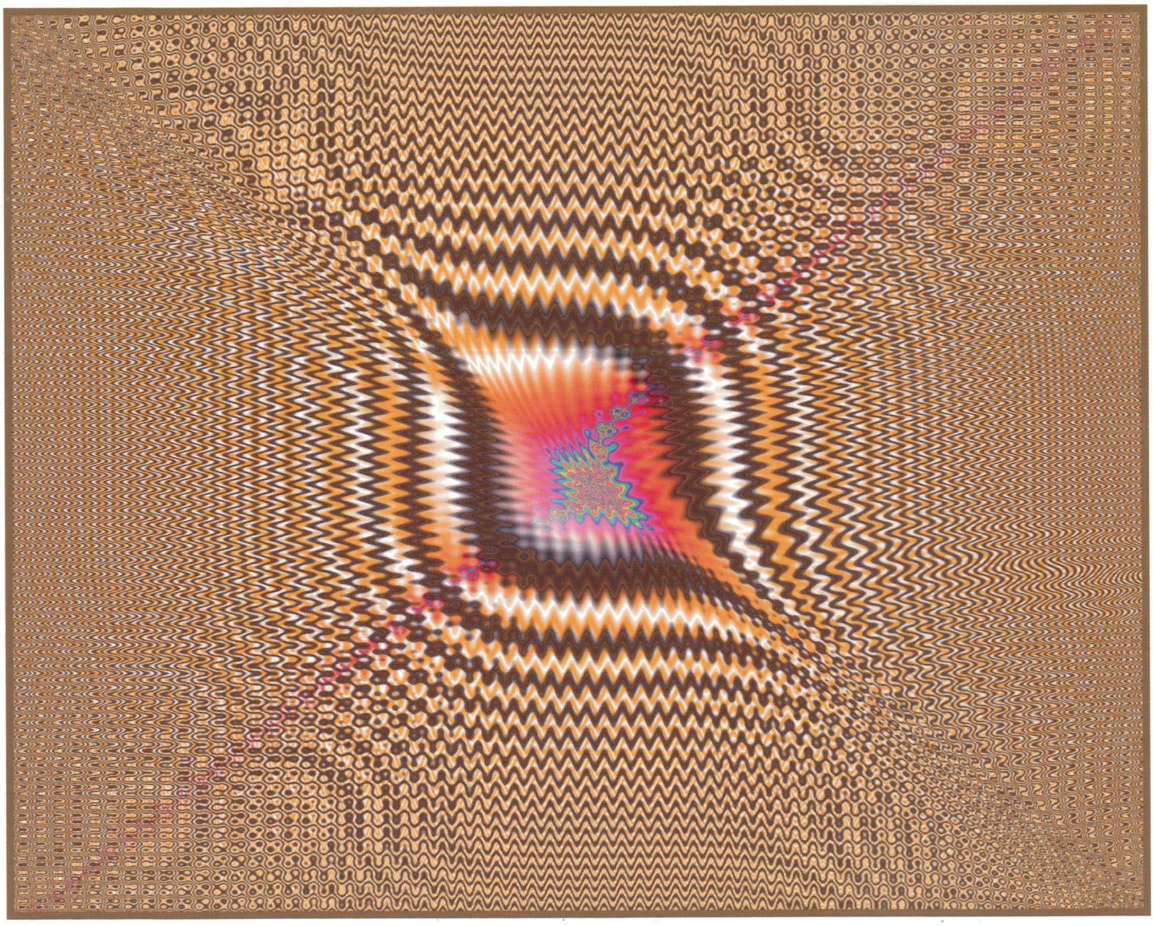
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2008年9月1日発行　第46巻9号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

9
2008

特集 トポロジカルな弦の世界
広がる新しい幾何学像の探求



No.543

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 543 September 2008

トポロジカルな弦の世界

広がる新しい幾何学像の探求

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は1年間（本誌のみ）11,000円，1年間（本誌＋別冊2冊）14,500円，半年間（本誌のみ）5,500円，半年間（本誌＋別冊1冊）7,250円です．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63年/7～2005年/9 省略

2005年/10 不確定性原理の新展開
別冊　スーパーストリング
/11 0の発見
/12 現代代数学への誘い

2006年/1 偶然から必然へ
/2 物理法則の直観的理解
/3 〈強い力〉
/4 「空間」とは何か
別冊　量子の新世紀
/5 数学と物理の対話
/6 発見とひらめき
/7 重力は語る
/8 ネットワーク科学の数理
/9 ランダムネス
/10 ツイスター理論の拡がり
別冊　場の量子論の拡がり
/11 固有値問題のひろがり
/12 素粒子像の探究

2007年/1 ヤング図形で遊ぶ物理と数学
/2 ランダム行列の広がり
/3 現代物理における超対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［代数編］
別冊　双対性の世界
/5 数学の直観的理解
/6 物理における位相の世界
/7 代数的物理観
/8 数学における場の量子論
/9 ディラック
/10 フーリエ解析の力
別冊　素粒子物理学の発展
/11〈電弱統一理論〉
/12「時空」への問いかけ

2008年/1 現象を視る
/2 ゲージ重力対応
/3 現代物理のための数学キーワード
/4 現代数学はいかに使われているか［解析編］
別冊　多様体の広がり
/5 物理と数学の難所
/6 線形代数の力
/7 物理的思考法のすすめ
/8 数の魅力

数理科学臨時別冊一覧

07年/6 相対性理論
07年/7 3次元トポロジーの新展開
07年/9 数理・情報系のための整数論講義
07年/11 コンピュータ将棋の頭脳
07年/12 計算神経科学への招待
08年/1 演習 くり込み群
08年/3 熱方程式で学ぶ逆問題
08年/5 重力理論講義
08年/6 代数幾何入門講義
08年/7 ネットワーク科学への招待

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
ブックファースト渋谷店
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
ブックファースト青葉台店（横浜）
栄松堂ジョイナス店（横浜）
有隣堂イセザキ町店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
文教堂ブックセンター（川崎）

旭屋船橋店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
紀伊國屋書店松山店
紀伊國屋書店福岡店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
紀伊國屋書店新潟店
旭屋札幌店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

——大学生協・売店——

東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
電気通信大学・福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店

September 2008 MATHEMATICAL SCIENCES Number 543

特集／トポロジカルな弦の世界

トポロジカルな弦理論の 20 年

菅 野 浩 明

1. はじめに

インターネットで検索してみるとトポロジカルな弦理論 (topological string) という言葉が使われ始めたのは 1990 年頃です[1)]．1988 年からフィールズ賞を受賞する 1990 年前後にかけてウィッテンは位相的場の理論の考え方を提唱し，一連の論文を発表しています．弦理論の最終的な定式化がどのようになるのかは全くわかりませんが，現時点で摂動論的定式化として採られている方法は弦が時空内を運動して描く軌跡のなす 2 次元世界面上の場の量子論の“集合体”として弦理論をとらえるものです．この定式化に沿って，2 次元重力理論（数学的にはリーマン面のモジュライ空間の理論）と共形場理論に対して位相的場の理論の考え方を適用することにより位相的弦理論が構成されました．一方，キャンデラスらのグループによる有名なミラー対称性の計算がなされた[2)]のもちょうどその頃です．ミラー対称性に関する解説は細野氏，植田氏の記事に譲りますが，位相的弦理論にも平行して A 模型と B 模型の 2 種類が存在します[3)]．90 年代前半はミラー対称性や可積分系との関連が位相的弦理論の研究の中心でした．その代表例がウィッテン・コンセヴィッチ理論です（村瀬氏の記事を参照）．位相的弦理論の強みの一つは，しばしば問題を“完全に解ききる”ことができる点にあります．この意味でキャンデラスらの有名な論文のタイトルが“A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal field theory”となっているのは極めて象徴的です．

その後 1994 年から 1996 年にかけて起きた超対称ゲージ理論や超弦理論の劇的な進展を経て，双対性や D ブレインを理解するためのおもちゃの弦模型（toy model）として位相的弦理論はその応用範囲を拡げてきました．それとともに位相的弦理論は数学的にも非常に豊かな内容を含んでいることが次々と明らかにされ，現在ではかなり洗練されたものになっています．今回の特集で扱われている話題の多様さからも窺えるように誕生から 20 年が経過しようとする現在，弦理論が示唆する新しい幾何学の方向を探求する手がかりとして位相的弦理論について概観してみることは一定の意味があるように思います．

2. トポロジカルな場の理論と弦理論

場の量子論や弦理論のもつ力学的情報は分配関数や相関関数と呼ばれる量を計算することにより得られます．一般に場の力学変数を $\phi(x)$ その作用を $S[\phi]$ とすれば，分配関数は経路積分[*1)]を用

いて形式的に

$$Z := \int [d\phi] e^{-S[\phi]} \tag{1}$$

で与えられ，N 点相関関数は

$$\langle \mathcal{O}_1[\phi] \cdots \mathcal{O}_N[\phi] \rangle = \frac{1}{Z} \int [d\phi] \mathcal{O}_1[\phi] \cdots \mathcal{O}_N[\phi] e^{-S[\phi]}$$

と書けます．ここで $\mathcal{O}_i[\phi]$ は場の力学変数 $\phi(x)$ から作られる“観測（可能）量”です．先に触れたように弦理論の摂動論的定式化では，弦の世界面上の場の量子論の“集合体”として弦理論をとらえます．したがって弦理論の振幅計算においても上のような分配関数や相関関数の計算が基本になります．

一方，トポロジーと呼ばれる数学の分野では幾何学的対象を連続的に変形しても変わらない量（不変量）を研究します．トポロジカルな場の理論や弦理論とは理論の分配関数や相関関数が，このような不変量となっている理論の総称です．分配関数や相関関数の計算に現れる作用 $S[\phi]$ や“観測量”は一般に時空の計量や $\mathcal{O}_i[\phi]$ の位置，さらには相互作用の強さといった，様々なパラメータ*2) に依存しています．分配関数やあらゆる相関関数がこれらのパラメータに依存しないとき（あるいはごく一部のパラメータにのみ依存するとき）理論はトポロジカルであるといいます．ここで“関数”という言葉が使われていますが，トポロジカルな相関関数の一つ一つは“観測量” $\mathcal{O}_i[\phi]$ の位置を（連続的に）動かしても変わらないので一般に定数になります*3)．これらの数が例えば数学でグロモフ・ウィッテン不変量と呼ばれるものになっています．

トポロジカルな理論の例としてまず挙げられるのは 2 次元重力理論と 3 次元チャーン・サイモンズ理論です．重力理論のアインシュタイン・ヒルベルト作用は時空の計量 $g(x)$ から計算されるスカラー曲率 $R[g]$ の積分ですが 2 次元リーマン計量に対して，これは空間のオイラー数と呼ばれる不変量となります．同様に 3 次元チャーン・サイモンズ理論はゲージ場 $A(x)$ に関する 3 次微分形式を作用とする理論で，ウィッテンにより 3 次元多様体の不変量や結び目の不変量と関係していることが明らかにされました．これらの例は作用や観測可能量自身が位相的な性質をもつものですが，トポロジカルな理論にはもう一つコホモロジカルな理論と呼ばれるクラスがあります．これは歴史的にゲージ理論や弦理論の量子化で用いられてきた BRST コホモロジーの概念を用いるもので，技術的になるので詳細は省略しますが，パラメータ依存性がコホモロジーの意味で自明になるように理論が構成されます．特に拡大された超対称性をもつ理論に“ツイスト”と呼ばれる数学的操作を行うことにより，コホモロジカルな理論とみなすことができる点が応用上重要です．この“ツイスト”により構成されるトポロジカルな理論は元の超対称理論の BPS 状態と呼ばれる部分のみを取り出していると考えられています．

3. トポロジカルな弦理論の拡がり

トポロジカルな理論は，ある意味で一つのものの見方を示しているに過ぎないので，弦理論やゲージ理論における様々な物理的問題と組み合わされて初めて意味があるといえます．すなわち余分な部分を消し去って考えるべき問題の本質的な部分を取り出したときに，そこにトポロジカルな弦理論あるいはゲージ理論が現れる場合，その威力が発揮されるのです．幸いなことに，この 15 年ほどの間に分かってきたことは双対性が関わる問題でかなり多くの場合，このようなことが実際に起こっているらしいということです．さらにこのようにして取り出された位相的部分の数学的構造を見てみると，双対性が予言する思いもよらない関係が見えてくることも分かってきました．トポロジカルな理論の大きな利点は位相的な性質をもつ

*1) 「積分」とは何かについては，村瀬氏の記事に興味深い逸話が紹介されています．

*2) これらはしばしば理論のモジュライパラメータと呼ばれます．

*3) 例外的に許されるのは 2 つ以上の $\mathcal{O}_i[\phi]$ が衝突する際に現れる接触項（contact term）です．

分配関数や相関関数のモジュライパラメータ依存性が非常に良くコントロールできることです．これは双対性の議論において重要な意味を持ちます．双対性の主張では一方の理論の弱結合領域と他方の理論の強結合領域が対応することがしばしば起こりますが，通常の場の量子論や弦理論では強結合領域で信頼できる非摂動的計算法があまりないからです．また超対称ゲージ理論に関するサイバーグ・ウィッテン理論や超弦理論のミラー対称性に関わる計算で典型的に見られることですが，弱結合領域での局所的な計算が強結合領域にまで接続されて大域的な解となる様子は，数学的に大変興味深い現象であり物理的にも示唆に富んだものとなっています．これも分配関数や相関関数のパラメータ依存性が数学的に精密にコントロールできることで初めて明らかになったことです．

今回の特集では，トポロジカルな弦理論の拡がりの具体例となる最先端の話題を集めてみました．先に述べたように位相的弦理論には A 模型と B 模型という 2 種類がありますが，A 模型の出発点ともいえるのがリーマン面のモジュライ空間の交叉理論とホッジ積分に関するウィッテン・コンセヴィッチ理論です．一方，B 模型の基礎となるのがいわゆる正則アノマリー方程式です．村瀬氏と細野氏の記事は，これらの理論が過去のものではなくいまだに新たな進展を生み出していることを示しています．2 つの模型の代数的側面はそれぞれ梶浦氏と高橋氏の記事で紹介されています．ホモトピー代数構造は A 模型における D ブレインを数学的に記述する深谷圏の理解で重要な役割を果たします．一方，複素構造の変形理論や周期積分の理論と密接な関係をもつ B 模型は特異点理論と深い関係があります．ここでは B 模型における D ブレインの記述で重要な道具となっている行列因子化が後述するリンク・ホモロジーにおいても用いられていることを指摘しておきたいと思います．続く植田氏と田中氏の記事は奇しくもホモロジーが共通するキーワードになりました．植田氏が強調しているようにコンセヴィッチによるホモロジカルなミラー対称性の提唱が，その後の D ブレインの（再）発見に先立つものであることは興味深い点です．AdS/CFT 対応のようなゲージ理論・弦（重力）理論対応において本質的な役割を果たす D ブレインの数学的な定式化*4) が強く望まれますが，これらの記事は位相的弦理論が D ブレインをより深く理解するための手がかりを与えてくれるのではないかと期待させます．位相的ゲージ理論の典型的な例としてあげた 3 次元チャーン・サイモンズ理論が，位相的弦（場の）理論として理解できることを指摘したのもウィッテンです[4]．田中氏が紹介しているように，この分野での最先端の話題の一つがリンク・ホモロジーですが，これもトポロジカルな弦理論の観点からの解釈がなされています[5]．中津氏と山口氏の記事で紹介されているようにトポロジカルな弦理論には，より物理的な応用もあります．ここで取り上げられている結晶溶解の統計模型やブラック・ホールのエントロピーといった話題は量子論的時空の離散性と深く関わっているように思えます．最後に現代素粒子論の重要課題に対する応用についてはトポロジカルな弦理論の発展に大きな貢献をしてきた大栗氏が物理学会誌に書いた解説記事[6] を強くお薦めします．

*4) 後にあるインタビュー記事では D ブレインに触れることを忘れていましたので，ここで改めて弦理論の幾何学における D ブレインの重要性を強調しておきたいと思います．

参考文献

1) 例えば R. Dijkgraaf, E. Verlinde and H. Verlinde, "Notes on Topological String Theory and 2D Quantum Gravity", Trieste Spring School 1990.
2) ここではあえて原論文ではなく，当時の状況がよく描かれている B. Greene, "The Elegant Universe", (1999); 和訳『エレガントな宇宙』(2001) をあげておきます．
3) E. Witten, Mirror manifolds and topological field theory, arXiv:hep-th/9112056.
4) E. Witten, Chern-Simons gauge theory as a string theory, arXiv:hep-th/9207094. *Prog. Math.* **133** (1995) 637.
5) S. Gukov *et al*, Link Homologies and the Refined Topological Vertex, arXiv:0705.1368[hep-th].
6) 大栗博司，「トポロジカルな弦理論とその応用」，日本物理学会誌 **60**, No.11 (2005) 850.

（かんの・ひろあき，名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

Witten–Kontsevich理論の思いがけない新展開



村瀬　元彦

1. はじめに

トポロジー的弦理論の数多くの源泉の一つは1991年のWitten[15)]予想にある．これは純粋に代数幾何学の予想なのだが，それが提示されて間もなくKontsevich[4)]によって驚異的方法で解かれてしまったため，かえってその数学的理解が進むのに時間がかかってしまった．2007年に相次いで出版された，Kontsevichの手法によらない純粋に幾何学的な証明[5~8)]を見れば，実はWittenの予想を証明すること自体は決して難しいことではなかったことが納得される．むしろKontsevichの理論[4)]が我々に何を伝えようとしたのかを理解することの方が遥に難しかったのだ．

本稿ではKontsevich理論がトポロジー的弦理論に何を齎してきたかに焦点を定め，EynardやOrantin等によって現在建設されつつある新理論[3)]への一つの視点を紹介する．

2. リーマン面のモジュライと Witten 予想

コンパクトで境界のない向きづけられた位相曲面 Σ は種数と呼ばれる一つの非負整数 g で決まり，球面に g 個のハンドルを付けたものと同相である．Riemannは1変数有理型函数の定義域がこういった曲面であることを示した．曲面 Σ 上の有理型函数 f とはリーマン球面への正則写像 $f:\Sigma\to\mathbb{P}^1$ のことだから，定義域 Σ には複素構造が入り，f のリーマン面と呼ばれる1次元複素多様体になる．今実軸上に $2d$ 個の点 $a_1<a_2<\cdots<a_{2d-1}<a_{2d}$ を取り，方程式

$$y^2=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{2d-1})(x-a_{2d}) \tag{2.1}$$

で定められる複素平面曲線に無限遠点を一つ付け加えた超楕円曲線 C を考えよう．座標 x,y の任意の有理型函数は C 上の有理型函数を与える．例えば函数 $y=\sqrt{\prod_i(x-a_i)}$ は，x の函数と見れば2価だが C 上では無限遠点に極を持つ1価の有理型函数である．このことから C は複素 x 平面2枚を d 個のスリット $[a_1,a_2],\cdots,[a_{2d-1},a_{2d}]$ のところで張り合わせてできる種数 $g=d-1$ のリーマン面であることが分かる．

位相曲面 Σ をリーマン面とする仕方，すなわち Σ への複素構造の入れ方，が本質的にどのくらいあるかを問うのがリーマン面のモジュライ問題であり，その集合を $\mathfrak{M}_g$ で表す．種数 g は曲面 Σ のオイラー標数 $2-2g$ を決め，種数が違えば曲面のトポロジーが違うのだから，モジュライ空間 $\mathfrak{M}_g$ と $\mathfrak{M}_{g+1}$ との間には何の関係もない．これはすべての種数についてモジュライ空間の性質を調べようとするとき極めて不都合である．そこでモジュライ空間を拡張する必要が生まれる．例えば式(2.1)で最後のスリット $[a_{2d-1},a_{2d}]$ が一点 $a_{2d-1}=a_{2d}=a$ に退化した極限を考

えると，平面上の点 $(a,0)$ の近傍では代数曲線 C は $y^2=k(x-a)^2$ で近似され，2つの成分 $y=\sqrt{k}(x-a)$ と $y=-\sqrt{k}(x-a)$ とに分解する．ここで $k=(a-a_1)\cdots(a-a_{2d-2})$．従ってこの退化極限で C は $(a,0)$ に有理2重特異点を持つ．この特異代数曲線は種数 $g-1$ のリーマン面上の2点を無理やりくっつけたものと見ることもできるから，種数の小さいリーマン面のモジュライが種数の大きいモジュライ空間の境界に現れることが分かる．

そこで，種数 g のリーマン面 C に有理2重特異点を許し，また C 上 n 個の相異なる非特異点 $x_1,\cdots,x_n$（マーク点と呼ぶ）を付けたもののモジュライ空間

$$\overline{\mathfrak{M}}_{g,n}=\{[C,(x_1,\cdots,x_n)]\}$$

を考えれば，異なる g や n の間の関係をつけることができる．例えば最後のマーク点を忘れることによってリーマン面の普遍族 $\pi:\overline{\mathfrak{M}}_{g,n+1}\to\overline{\mathfrak{M}}_{g,n}$ が定義される．マーク点の効能は他にもあり，特にモジュライ空間上にコホモロジー類を作るのに役立つ．各マーク点 x_i は非特異なのでそこでのリーマン面 C の余接空間 $T^*_{x_i}C$ をモジュライ空間 $\overline{\mathfrak{M}}_{g,n}$ の点 $[C,(x_1,\cdots,x_n)]$ に付与することによって $\overline{\mathfrak{M}}_{g,n}$ 上の直線束 $\mathcal{L}_i$ を決める．この直線束の第1Chern類を $c_1(\mathcal{L}_i)$ で表す．Wittenに従って交叉数を表す記号

$$\langle\tau_{d_1}\tau_{d_2}\cdots\tau_{d_n}\rangle=\int_{\overline{\mathfrak{M}}_{g,n}}c_1(\mathcal{L}_1)^{d_1}c_1(\mathcal{L}_2)^{d_2}\cdots c_1(\mathcal{L}_n)^{d_n}\quad(2.2)$$

を導入しよう．これは各Chern類を2次微分形式と見てそれの積をモジュライ空間上で積分した値で，正の有理数値をとる．Chern類の積分なので普通なら整数値を期待するところだが，リーマン面 C に各マーク点を固定するような非自明な自己同型群があればモジュライ空間はそこでオービフォルドとなるので，Chern類 $c_1(\mathcal{L}_i)$ は有理係数コホモロジー群 $H^2(\overline{\mathfrak{M}}_{g,n},\mathbb{Q})$ の元を与える．この自己同型を高々有限群にするために，双曲条件 $2-2g-n<0$ を仮定する．そうして初めてモジュライ空間がオービフォルドとして定義される．Witten予想を述べるためにさらに2つ記号を用意する．交叉数の生成函数を

$$F(t_0,t_1,t_2,\cdots)=\sum_{g=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d_1,\cdots,d_n\ge 0}\frac{1}{n!}\langle\tau_{d_1}\tau_{d_2}\cdots\tau_{d_n}\rangle t_{d_1}t_{d_2}\cdots t_{d_3}\quad(2.3)$$

で表し，$k\ge -1$ に対してVirasoro代数の生成元を

$$\begin{aligned}L_k=&-\frac{(2k+3)!!}{2}\frac{\partial}{\partial t_{k+1}}\\&+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(2(j+k)+1)!!}{(2j-1)!!}t_j\frac{\partial}{\partial t_{j+k}}\\&+\frac{1}{4}\sum_{i+j=k-1}(2i+1)!!(2j+1)!!\frac{\partial^2}{\partial t_i\partial t_j}\\&+\delta_{k,-1}\frac{t_0^2}{4}+\delta_{k,0}\frac{1}{48}\end{aligned}\quad(2.4)$$

で定める．このときVirasoro交換関係 $[L_m,L_n]=(m-n)L_{m+n}$ が成り立つ．

Witten 予想

1. すべての $k\ge -1$ について $L_ke^F=0$ が成り立つ．
2. $\tau=e^F$ に $t_i=(2i+1)!!T_{2i+1}$ を代入して T_{2i+1} の函数と見なすならばそれはKdV方程式系の τ-函数である．すなわち $u=\partial^2F/\partial T_1^2$ はKdV方程式系

$$u_3=\frac{3}{2}uu_1+\frac{1}{4}u_{111},$$

$$u_5=u^2u_1+2uu_{111}+4u_1u_{11}+\frac{6}{5}u_{11111},$$

$$\vdots$$

を満たす．ここで u_i は T_i による u の偏微分を表す．

Dijkgraaf–Verlinde–Verlinde[1]はVirasoro条件1が種数とマーク点の数に関する漸化式と同値であることを示した．式を簡単にするために(2.2)

で $\sigma_d=(2d+1)!!\tau_d$ と置く．

$$\left\langle \sigma_k \prod_{i=1}^{n-1} \sigma_{d_i} \right\rangle_{g,n} = \sum_{i=1}^{n-1}(2d_i+1)\left\langle \sigma_{d_i+k-1}\prod_{j\neq i}\sigma_{d_j}\right\rangle_{g,n-1}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{a+b=k-2}\left\langle \sigma_a\sigma_b\prod_{i=1}^{n-1}\sigma_{d_i}\right\rangle_{g-1,n+1}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{a+b=k-2}\ \sum_{g_1+g_2=g}\ \sum_{n_1+n_2=n-1}$$
$$\left\langle \sigma_a \prod_{i\in I}\sigma_{d_i}\right\rangle_{g_1,n_1+1}\left\langle \sigma_b\prod_{j\in J}\sigma_{d_j}\right\rangle_{g_2,n_2+1}. \quad (2.5)$$

最後の和は $\{1,2,\cdots,n-1\}=I\coprod J$ なるすべての分割について取る．DVV 漸化式はモジュライ空間 $\overline{\mathfrak{M}}_{g,n}$ 上の交叉数が $\overline{\mathfrak{M}}_{g,n-1}$, $\overline{\mathfrak{M}}_{g-1,n+1}$, $\overline{\mathfrak{M}}_{g_1,n_1+1}\times\overline{\mathfrak{M}}_{g_2,n_2+1}$ 上の交叉数で決まってしまうことを示す．特に，$\langle\tau_0^3\rangle_{0,3}=1$ と $\langle\tau_1\rangle_{1,1}=\frac{1}{48}$ とを与えればすべての交叉数が完全に決まってしまう．従って，Virasoro 条件 1 を無限多変数の線形偏微分方程式系と見れば，境界条件など全く付けずにその解空間が有限次元になっていることが分かる．もし方程式系 $L_k e^F=0$ が可換偏微分作用素で与えられていたならばそれは平坦接続による函数の特徴付けと同じで，解は本質的には定数函数である．非可換な線形偏微分作用素による方程式系であれば両立条件が初めから破れているわけだから一般には自明な解 0 しか持たない．Virasoro 条件 1 は非可換な方程式系としては最も可換なものに近く，自明でも定数でもない解を有限次元だけ許す．Virasoro 代数の交換関係はまさにそのぎりぎりのバランスを保っている．

3. 行列積分論と Kontsevich の預言

この Witten の予想に対して，Kontsevich は全く予想だにしなかった解答を与えた．彼は生成函数 F は行列積分で与えられると主張したのである．$\mathcal{H}_N$ で N 行 N 列のエルミート行列の集合を表し，その上の正規化されたルベーグ測度 $d\mu(X)$ を $\int_{\mathcal{H}_N} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(X^2\Lambda)}d\mu(X)=1$ で決める．$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)$ は正定値対角行列．

Kontsevich の定理　$W=K$,

$$\begin{aligned}&F(t_0,t_1,t_2,\cdots)\\&=\sum_{g,n,d_i}\frac{1}{n!}\int_{\overline{\mathfrak{M}}_{g,n}}c_1(\mathcal{L}_1)^{d_1}\cdots c_1(\mathcal{L}_n)^{d_n}t_{d_1}\cdots t_{d_n}\\&=\lim_{N\to\infty}\log\int_{\mathcal{H}_N}e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(X^2\Lambda)}e^{\frac{\sqrt{-1}}{6}\mathrm{tr}(X^3)}d\mu(X).\end{aligned}\quad(3.1)$$

ここで行列積分を t_j の函数とするために $t_j=-(2j-1)!!\mathrm{tr}(\Lambda^j)$ と置く．

Kontsevich はモジュライ空間上の積分が行列積分であると言っているのだ．この主張のものすごさは，それが Witten 予想を trivial にしてしまうところにある．上の形でなくとも一般に行列変数を一つしか含まないような行列積分は必ず簡単な Virasoro 条件を満たす．それは積分の中で変数 X を $X+\delta X$ に変えても定積分の値は変わらない，という自明な命題の帰結に過ぎない．従ってまず予想の 1 が自明になってしまう．e^F が KdV 方程式系の τ-函数だということもほとんど自明である．Kontsevich はまずエルミート行列積分がボゾン化を与える公式であることに注目し，さらに被積分函数が佐藤グラスマン多様体の点を与えることを示した．従って Kontsevich 行列積分は KP 方程式系の τ-函数である．それが実際に KdV の解になっていることも計算だけで分かる．自明でないのはモジュライ空間上の積分が行列積分に等しいという等式 (3.1) だけである．

大学 3 年でルベーグ積分を学んだとき，何ともいやな理論だと感じたことを思い出す．理論自体に全く計算する方法が含まれていないのだ．リーマン積分なら少なくとも近似計算の方法は与えてくれる．積分値がどのくらいになるのか想像すらできない積分論とは一体何なのだろうか？ そんなとき（1975 年 12 月），佐藤幹夫教授が東京に来られ，場の量子論の Feynman 積分を代数解析的に特徴づけるという内容の集中講義をされた．毎日 3 時間を超える熱演が続いた．その中で佐藤教授は，「計算方法を与えない積分論なんて役に立たな

い．ルベーグ積分論はその最たるものだ．我々はNewtonの微積分の基本定理，Cauchyの積分公式，Riemannの留数定理に範を取り，計算方法をも与えるような積分論を構築しようとしているのである」と宣言された．「積分とは計算するべきものである」という単純明快な主張は爽快であった．

そのちょうど10年後，私はUCLAでHedrick職助教授を務めていた．当時はどこの数学科でも見られた午後のお茶の時間に私は竹崎正道教授に初めてお目にかかった．初対面の会話に私は積分論を選び，「積分とは計算するべきものだと思います」と始めた．すると竹崎教授は，「村瀬さん，それは違いますよ．積分で表された量というのは測定されるべきものなのです．観測して測定する，そういう量を積分が表している．だから積分論の基礎を測度論と言うのですね．まさに言い得て妙，でしょう？」と切り返された．竹崎教授の主張は「積分とは測定するべきものである」ということになる．私は数学者たちがそれぞれ全く違った積分観を持っていることを面白く感じ，それがいつ調和するのだろうと思いをめぐらせた．

もう一度等式 $W = K$ を眺めてみよう．左辺はモジュライ空間上の積分だが，それは量子重力場作用素の積の真空期待値であり，まさに観測し測定されるべき量を表している．一方右辺は具体的な行列積分であり，Feynman積分の最も簡単な場合として実際計算可能なのである．前述した通りそれがVirasoro条件やKdV方程式系を満たすことはその積分形から明らかなのだ．従って $W = K$ は，互いに矛盾する2つの積分観が融合するまさにその接点に位置している．

Witten予想の代数幾何的構造は，文献5, 6)の見事な論文により明らかにされた．彼らはリーマン球面のHurwitz分岐被覆を数える母函数が分岐点の合流によってどのように変化するかを調べ，対称群の表現論で知られていたcut-and-join方程式と呼ばれる関係式を導いた．一方でHurwitz分岐被覆の数は，$\mathbb{P}^1$ のGromov–Witten不変量に $\mathbb{P}^1$ への $\mathbb{C}^*$-作用に由来するAtiyah–Bott局所化公式を適用して，$\overline{\mathfrak{M}}_{g,n}$ 上のHodge類と呼ばれるコホモロジー類と $c_1(\mathcal{L}_i)$ たちの積の積分で表される (ELSV公式)[2)]．被覆度数が無限大の極限ではHodge類の寄与がなくなり，cut-and-join方程式とELSV公式とはVirasoro条件(2.5)を導く．Mirzakhani[7, 8)]もVirasoro条件を双曲幾何とシンプレクティック幾何を巧みに用いて出している．しかしどの方法でもKdV方程式系を出すことはできない．（文献5)はKdVを導いているようにも見えるが，実は彼らの方法ではKdV方程式系の一番始めの方程式しか出せない．従ってこれもVirasoro条件を出す論文と捉えるのが正しい．）

Virasoro条件は(2.5)を通して交叉数(2.2)をすべて与える．ではWittenの第2の予想，生成函数 F がKdV方程式系を満たすということの意義は何なのだろうか？ KdVの解空間は無限次元だから，この方程式系だけでは F は決められない．この問題の解答はごく最近になって文献12)によって与えられた．KdV方程式は時間発展方程式であることを思い起こそう．F の変数は生成函数としてのラベルだが，それを無限多時間変数と見たとき，その時間発展が交叉数(2.2)をもっと一般の交叉数 $\langle \kappa_1^m \tau_{d_1} \cdots \tau_{d_n} \rangle$ に変形することに我々[12)]は気付いた．ここで κ_1 はMumford, Miller, 森田茂之によって与えられた $\overline{\mathfrak{M}}_{g,n}$ 上の2次コホモロジー類である．今新しい生成函数を

$$
\begin{aligned}
&G(s; t_0, t_1, t_2, \cdots) \\
&= \sum_{g,n,d_i} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \kappa_1^m \tau_{d_1} \cdots \tau_{d_n} \rangle \frac{s^m}{m!} t_{d_1} \cdots t_{d_n}
\end{aligned}
$$

で定義しよう．すると $\gamma_i = \frac{(-1)^i}{(2i+1)i!} s^{i-1}$ と置くとき，恒等式

$$
G(s; t_0, t_1, t_2, \cdots) = F(t_0, t_1, t_2+\gamma_2, t_3+\gamma_3, \cdots)
$$

が成立する．まさに F の時間発展として新しい生成函数 G が生まれるのだ．扱う対象が変わるのだから，KdVの時間発展は理論の変形を与えると言ってもよい．我々は同じ論文[12)]でさらに e^G がVirasoro条件を満たすこと，および(2.5)と同じ形の漸化式で拡張された交叉数が完全に決定されることを示した．

等式 $W=K$ を数学的に厳密に理解するには文献 7, 8) に基づいた Mondello[9] が優れている．F は $\overline{\mathfrak{M}}_{g,n}$ 上のコホモロジー論であり閉じた弦理論の分配函数である．一方 Kontsevich 行列積分はリボングラフの空間のユークリッド体積を与える生成函数である．リボングラフは境界付きリーマン面だからこれは開いた弦理論に関係した量である．従って $W=K$ は開いた弦理論と閉じた弦理論とが同じ結果を与えるという一般的な主張の一例でもある．リボングラフの空間は主にユークリッド的対象として考えられてきた[11]．Mirzakhani[7, 8] はそれを境界付き双曲曲面のモジュライ空間と捉えることによって，閉じた弦理論と無限に開いた弦理論との間をシンプレクティック商を用いて見事に繋ぐホモトピー理論とでも言うべきものを打ち立てた．さらに驚くべきことに彼女は境界の長さを任意に与えたときの境界付き双曲曲面のモジュライ空間の Weil–Petersson 体積を計算する漸化式を与えたのである．我々[12] は直ちにそれが Virasoro 条件と同値であることを見出した．一方 Mondello は境界付き双曲曲面のモジュライ空間の Weil–Petersson シンプレクティック形式が境界の長さを無限に飛ばした極限で Kontsevich が用いた 3 価リボングラフの空間上のユークリッド的 2 次微分形式に収束することを確かめた[9]．こうして Mirzakhani のホモトピー理論によって等式 $W=K$ の最も明快で数学的に厳密な証明が与えられたのである．

Kontsevich 理論の真髄は，それが Witten 予想を捉える正しい視点を与えたことにある．行列積分を使うことによって，Virasoro も KdV も自明な結論になってしまう．文献 4) は従って「トポロジー的弦理論は行列積分の視点から理解されるべきものである」という預言の書だったのである．

4. 預言の成就と逆転の発想

Virasoro 条件を表す漸化式 (2.5) の位相的な形が実は本質的な意味を持っていることはようやくこの 1 年ほどの間に数学，物理学両方の世界で理解されるようになった．図 1 は Mirzakhani の漸化式の模式図である．Witten が調べた交叉数も，我々が扱った拡張された交叉数も，また Mirzakhani の調べた Weil–Petersson 体積も全く同じ構造を持った漸化式で決まっていることに注意していただきたい．この漸化式の本質はどこにあるのだろうか？

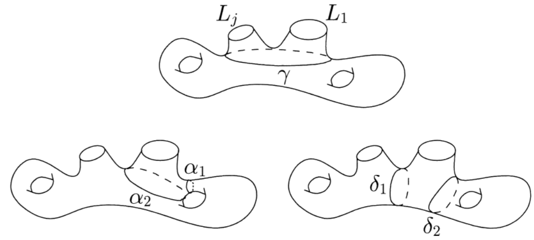


図 1　境界付きリーマン面の分割.

その答えを Eynard とその共同研究者たちが見出した[3]．彼らは種数 g で n 個の点を持ったリーマン面が，理論の背後に潜む別のリーマン面の n 点相関函数を与えていると考え，その相関函数を今問題にしている普遍的漸化式で定義することを提唱した．この漸化式は位相的には図 1 に描かれたものと同一であり，初めに任意に定めたリーマン面の古典解析のみによって決まっている．数年前 Eynard はランダム行列理論（RMT）の背後に潜むリーマン面に注目した．今 $V(x)$ を 1 変数多項式とし，行列積分

$$Z_N(V)=\int_{\mathcal{H}_N} e^{-N\mathrm{tr}V(X)}dX \tag{4.1}$$

を考えよう．サイズ N のエルミート行列は N 個の実固有値を持つが，サイズ無限大の極限では適切に規格化された固有値の集合は 2 節で考察したような実軸上のいくつかの区間になる．従ってレゾルベント函数

$$W(z)=\lim_{N\to\infty}\frac{\int_{\mathcal{H}_N} e^{-N\mathrm{tr}V(X)}\mathrm{tr}\left(\frac{1}{z-X}\right)dX}{NZ_N(V)} \tag{4.2}$$

は複素平面上それらの区間以外で正則である．ではこのレゾルベント函数のリーマン面は何であろうか？ 数学者たちはそれがまさに (2.1) で与えた

超楕円曲線 C であることを示した．モノドロミー保存変形理論との関係から物理学者たちはこれを「スペクトル曲線」と呼ぶが，私はむしろ「レゾルベント曲線」と呼ぶべきだと思う．既に 2 つの固有値の相関函数が C のベルグマン核で与えられることなどが数学で知られていた．Eynard 等は (4.1) の $Z_N(V)$ が V の函数として KP 方程式系を満たし，(4.2) の $W(z)$ およびその n 点拡張が DVV 型漸化式を満たすことに留意して，逆に任意のリーマン面 C，その上のベルグマン核，KP 方程式，そして何よりも普遍的な漸化式を出発点として新しい理論を組み立てたのである[3]．このリーマン面は我々が今まで考察してきたモジュライ理論に現れるリーマン面とは何の関係もない．すべての種数にわたるリーマン面のモジュライ空間が，初めに与えられたリーマン面 C の間の相互作用を決めている．彼らは C とその時間発展としての変形族をうまく取ることによって文献 1, 7, 8, 12) に現れるすべての漸化式を一度に出してみせ，普遍的な Virasoro 条件の由来を明らかにした．まさに一刀両断．返す刀で物理学者たちはさらに Seiberg–Witten 理論，3 次元トーリック Calabi–Yau 多様体の Gromov–Witten 不変量，ある種の組紐の量子不変量などをこの新理論で一気に扱えることを示唆している（Bouchard, Dijkgraaf, Klemm, Mariño, Pasquetti, Vafa, 等）．何故いつも同じ形の Virasoro 条件が現れるのかと問うのではなく，この普遍的な漸化式をいわば公理として出発点に据え，その帰結として得られる結果に幾何学的解釈を与えることで，トポロジー的弦理論とゲージ理論との対応に具体的な道筋を与えたのである．まさに発想の逆転が起こったのであった．

Eynard–Orantin 理論[3]は行列積分論に基づいてはいるが行列模型そのものではない．トポロジー的弦理論は行列積分論に基づいて理解されるであろうと言う Kontsevich の預言がここに来てついに成就しているようである．近年の RMT の大発展は Witten–Kontsevich 理論とほぼ同じ頃に現れた Tracy–Widom 理論[14]に原点を置く．当初は RMT と幾何学との関係は明らかではなかったが，

最近の発展によればRMTは古典的リーマン面論の現代版と言うことができる．Seiberg–Witten理論に数学的基礎付けを与えた中島–吉岡理論[13]の幾何学的解釈もこの新たな発展の中で得られるのかもしれない．かつてソリトン理論が成熟した後でリーマン面の代数幾何学との関連が発見され，予想外の大発展があった[10]．RMTも今ではすっかり成熟した数学の理論となったが，思いがけないリーマン面の幾何学との繋がりがさらなる進展を約束している．

大阪市立大学に設置された数学研究所で2008年12月にリーマン面を主題とする国際研究集会が開かれる．多くの招待講演者のうち，中島啓，Bertrand Eynard, Kefeng Liu, Craig Tracyの各氏等が「リーマン面と可積分系」というセッションで講演される．トポロジー的弦理論，ランダム行列理論，Seiberg–Witten理論の数学・物理学両面に貢献したこれらの人々が一堂に会するこの研究集会は，本稿で扱った新しい発展を学ぶ素晴らしい機会をも与えてくれる．私にとってリーマン面やKP方程式との付き合いは永い．もうこれで終わりかと思うたびに私は次の新しい章へと導かれてきた．今起っている大爆発に再び私はわくわくして今まで勉強したことのないリーマン面やKP理論の新展開を学んでいる．

参考文献

1) Robbert Dijkgraaf, Erik Verlinde and Herman Verlinde, Loop equations and Virasoro constraints in nonperturbative two-dimensional quantum gravity. *Nuclear Phys. B*, **348** (1991), 435–456.

2) Torsten Ekedahl, Sergei Lando, Michael Shapiro, and Alek Vainshtein, Hurwitz numbers and intersections on moduli spaces of curves. *Invent. Math.*, **146** (2001), 297–327.

3) Bertrand Eynard and Nicolas Orantin, Invariants of algebraic curves and topological expansion. ArXiv:math-ph/0702045.

4) Maxim Kontsevich, Intersection Theory on the Moduli Space of Curves and the Matrix Airy Function. *Commun. Math. Phys.* **147** (1992), 1–23.

5) M.E. Kazarian and S.K. Lando, An algebro-geometric proof of Witten's conjecture. *J. Amer. Math. Soc.* **20** (2007), 1079–1089.

6) Yon-Seo Kim and Kefeng Liu, A simple proof of Witten conjecture through localization. ArXiv:math.AG/0508384.

7) Maryam Mirzakhani, Weil-Petersson volumes and intersection theory on the moduli space of curves. *J. Amer. Math. Soc.* **20** (2007), 1–23.

8) Maryam Mirzakhani, Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces. *Invent. Math.*, **167** (2007), 179–222.

9) Gabriele Mondello, Triangulated Riemann surfaces with boundary and the Weil-Petersson Poisson structure. *J. Differ. Geom.* to appear.

10) 村瀬元彦，ソリトンの代数的側面．別冊・数理科学「ソリトン」(1985), 127–143.

11) Motohico Mulase and Michael Penkava, Ribbon graphs, quadratic differentials on Riemann surfaces, and algebraic curves defined over $\overline{\mathbb{Q}}$. *Asian J. Math.* **2** (1998), 875–920.

12) Motohico Mulase and Brad Safnuk, Mirzakhani's recursion relations, Virasoro constraints and the KdV hierarchy. *Indian J. Math.* **50** (2008), 189–218.

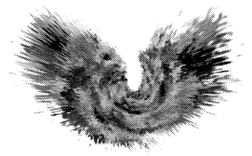
13) Hiraku Nakajima and Kota Yoshioka, Instanton counting on blowup. I. 4-dimensional pure gauge theory. *Invent. Math.* **162** (2005), 313–355.

14) Craig A. Tracy and Harold Widom, Fredholm determinants, differential equations and matrix models. *Commun. Math. Phys.* **163** (1994), 33–72.

15) Edward Witten, Two dimensional gravity and intersection theory on moduli space. *Surveys in Differential Geometry* **1** (1991), 243–310.

（むらせ・もとひこ，カリフォルニア大学）

正則アノマリー方程式とミラー対称性



細野　忍

■ 1. はじめに ■

1991年にCandelasをはじめとする物理学者が，射影空間 $\mathbf{P}^4$ の中で5次超曲面が定めるカラビ・ヤウ多様体の有理曲線の個数について，その数え上げ母関数を書き下す処方を発見した．ミラー対称性と呼ばれる不思議な対称性の帰結として導き，多くの数学者の関心を集めることとなった．当時，計算される数の数学的に正確な定義はなかったが，1993年にKontsevichが安定写像のモジュライ空間を導入し，これに基づいて定義が明確になされることになる．その後，GiventalやLian, Liu, Yauによって計算される数がGromov–Witten不変量と呼ばれるカラビ・ヤウ多様体の複素構造によらない不変量に一致することが示され“ミラー定理”として一応の決着に至っている[2)]．

一方で，1993年に物理学者Bershadsky, Cecotti, 大栗，Vafa（BCOV）は正則アノマリー方程式を提唱し[1)]，Candelasたちの有理曲線の数え上げ処方を一般の種数へ拡張した．Candelasたちの計算処方が，複素代数幾何学におけるホッジ構造の変形理論の枠組みで理解されるのに対し，BCOVによる正則アノマリー方程式は既存の数学理論では捉えられない内容を含み，それゆえ発表から15年近く経った現在においてもその数学的な理解はそれほど深まっていない．

本稿では，正則アノマリー方程式のそのような側面に焦点を当てることにしたい．

■ 2. 位相的弦理論 ■

(2-1) 位相的弦理論　既に解説されているように位相的な弦理論では，種数 g のリーマン面 Σ_g と d 次元カラビ・ヤウ多様体 X を考え，Σ_g から X への正則写像を問題とする．前節で述べた数え上げ母関数は大まかに

$$\mathrm{F}_g^X(t)=\int_{M_g} d^{6g-6}m \sum_{\phi:\Sigma_g\to X;\mathrm{hol}} e^{-t\int_{\Sigma_g}\phi^*\kappa} \quad (1)$$

のように書かれる．ここで，M_g はリーマン面のモジュライ空間で $g\geq 2$ では $3g-3$ 次元複素多様体，$\sum_{\phi:\Sigma_g\to X}$ は正則写像 ϕ に関する‘和’(積分)を形式的に表す．$g=0,1$ についてはリーマン面の自己同型のため幾分修正が必要であるが，類似の表示があるものとして理解されたい．また，κ は，X の計量を表す2次の微分形式で積分 $\int_{\Sigma_g}\phi^*\kappa$ はリーマン面の像 $\phi(\Sigma_g)$ の面積を表している．

(2-2) 安定写像　弦理論の経路積分から(1)のような表示が現れるが，その数学的な定義はKontsevichによって導入された安定写像（stable map）のモジュライ空間上の積分理論として理解されている[2)]．安定写像のモジュライ空間は2次のホモロジー類 $\beta\in H_2(X,\mathbf{Z})$ を固定するときに，リーマン面 Σ_g と正則写像 $\phi:\Sigma_g\to X$ の対全体として

$$\mathcal{M}_g(X,\beta)=\{(\Sigma_g,\phi)\mid[\phi(\Sigma_g)]=\beta\}/\sim$$

のように表現できる．もちろん正確な定義には安定性の概念の導入と同型 $\sim$，さらに積分理論を考

えるためにコンパクト化等を述べないといけないがここでは直感的な表示のみで満足する．ここで，写像 $\phi:\Sigma_g \to X$ は X の正則座標を Σ_g の正則座標で表すものであるから Σ_g の複素構造に依存する．従って，$\mathcal{M}_g(X,\beta)$ では Σ_g の複素構造と各複素構造に対して決まる正則写像 ϕ の対をすべて考える．また，Σ_g の複素構造には複素 $3g-3$ 次元のパラメータが入る一方，正則写像 ϕ に入るパラメータの個数はリーマン・ロッホの定理から決められて，結局 $\mathcal{M}_g(X,\beta)$ に入る（複素）パラメータの個数は

$$\begin{aligned}&\dim \mathcal{M}_g(X,\beta)\\ &= 3g-3+\dim X\,(1-g)+\int_\beta c_1(T_X) \quad (2)\end{aligned}$$

と表される ($g \geq 2$)．ここで，T_X は X の接束を表し $c_1(T_X)$ はその第 1 チャーン類を表す．特に，複素 3 次元カラビ・ヤウ多様体の場合は $c_1(T_X)=0$ である上に $\dim X=3$ なので $\dim \mathcal{M}_g(X,\beta)=0$ となり，対 (Σ_g,ϕ) が点として‘数えられる’様子が理解されるであろう．また，$\beta=0$ の場合 ϕ は定数写像を与えるものと理解すると $\mathcal{M}_g(X,0)=M_g\times X$ であることが分かり，M_g 上の位相的場の理論とのつながりが見える．$\mathtt{F}_g^X(t)$ を

$$\mathtt{F}_g^X(t)=\sum_\beta \langle 1\rangle_{g,\beta}^X e^{-t\int_\beta \kappa} \qquad (3)$$

と表記するのがよいであろう．

(2-3) 楕円曲線の例　母関数 $\mathtt{F}_g^X(t)$ あるいは Gromov–Witten 不変量の定義は数学的に完成しでき上がっている．しかし，数学では定義ができても計算不可能という定義がしばしば存在する（！）．一方で，理論物理学では，定義されることは同時に計算可能であることを意味し，実際 Candelas たちあるいは BCOV は $\mathtt{F}_g^X(t)$ の物理的な定義とその計算処方を同時に与えている．X を 1 次元カラビ・ヤウ多様体である楕円曲線を例にとって $\mathtt{F}_1^X(t)$ の（物理的な？）計算の処方を見ることにしよう．

その前にまず，X を楕円曲線（トーラス）にとるとき，Σ_0 から X への正則写像 ϕ は（定数写像以外に）存在しないことを確認しておこう．実際，X に存在する正則 1 形式の引き戻しを考えれば ϕ は定数であることが結論されるからである．よって楕円曲線の場合，$\mathtt{F}_1^X(t)$ から自明でない量が現れる．

$\mathtt{F}_1^X(t)$ を具体的に決定するために，2 つのトーラス Σ_1, X を

$$\Sigma_1=\mathbf{C}/(\mathbf{Z}1+\mathbf{Z}\tau), \quad X=\mathbf{C}/(\mathbf{Z}1+\mathbf{Z}T)$$

と表そう．ここで，τ, T は共に上半平面にある複素数で Σ_1, X の複素構造を定める．Σ_1 の複素座標を $z=x+y\tau$ $(1\leq x,y\leq 1)$，同様に X の複素座標を $w=x+yT$ $(1\leq x,y\leq 1)$ に取ることができる．このとき，正則写像 $\phi:\Sigma_1\to X$ は $w=f(z)$ と表されるが，少し考察することによって次の事柄が示される：「X の複素構造 T を固定するとき，正則写像 $w=f(z)$ が存在するのは，Σ_1 の複素構造が $\tau=(a+bT)/(c+dT), (a,b,c,d\in \mathbf{Z}, \left|\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right|\neq 0)$ と表されるときそのときに限り，また正則写像 ϕ は $w=(c+dT)z+\mathrm{const.}$ の形のものに限る」．ここに現れる定数 const. は $\phi(0)=0$ を要請して 0 に決める．また，$z=1, z=\tau$ の行き先はそれぞれ $\phi(1)=c+dT, \phi(\tau)=a+bT$ となり，Σ_1 が X を $\left|\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right|(=:\tilde{d})$ 重に覆う様子が読みとれる．モジュライ空間 $\mathcal{M}_1(X,\tilde{d})$ に含まれる対 (Σ_1,ϕ) はこのようなものからなり，少し工夫すると積分 (1) は

$$\int_{M_1}\frac{d\tau d\bar{\tau}}{(\mathrm{Im}\tau)^2}\sum_{\phi(\neq \mathrm{const.}):hol} e^{-t\int \phi^*\kappa}=\sum_{p,s>0}\frac{p}{ps}e^{-tpsV_X}$$

と計算される[1)]．ここで V_X は X の体積である．ϕ が定数写像の場合はもう少し正確な定義に基づく必要があるが，上の式に $-\frac{1}{24}tV_X$ の寄与を与えることが示される．$-t\mathrm{Vol(X)}$ を $2\pi it$ と書き改めて結果をまとめると，$\mathtt{F}_1^X(t)$ は

$$\frac{1}{12}(2\pi it)-\log\prod_{p>0}(1-e^{2\pi ipt})=-\log\eta(t) \quad (4)$$

となる．ここで $\eta(t)=q^{\frac{1}{24}}\prod_{n>0}(1-q^n)$ $(q=e^{2\pi it})$ は Dedekind の η 関数である．正則写像の数え上げ母関数を計算した結果，X の体積に関す

る複素パラメータ t についてモジュラー形式が登場するのである！ この理由は「体積を表すパラメータは，ミラー対称性によってミラー楕円曲線の複素構造のパラメータに入れ代わる」ためである．さらに複素構造のパラメータは上半平面に値を取り，同値な複素構造は基本領域 $\mathcal{D} = M_1$ によって代表される．こうして $\mathtt{F}_1^X(t)$ は，基本領域 $\mathcal{D}$ の関数を表すと期待されるが，'それが実際にモジュラー形式によって表される' という計算結果である．

(2-4) アノマリー　正則な 2×2 整数行列のなす群（を射影化したもの）を楕円モジュラー群と呼んで $\Gamma = PSL(2,\mathbf{Z})$ と記す．$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ は上半平面に $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\cdot t = \frac{at+b}{ct+d}$ によって作用する．このとき，η 関数は

$$\eta\Big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\cdot t\Big) = \varepsilon(-i(ct+d))^{\frac{1}{2}}\eta(t)$$

（ε は $|\varepsilon| = 1$ をみたす数）という性質を持つ．従って，$\mathtt{F}_1^X(t)$ は上半平面の正則関数であるが，モジュラー群の作用の下で不変にはなっていない．これを**モジュラーアノマリー**と表現することがある．一方で，$\mathtt{F}_1^X(t)$ の形を少し変形して

$$\mathtt{F}_1^X(t,\bar{t}) = -\log\sqrt{\mathrm{Im}(t)}\,\bar{\eta}(t)\,\eta(t)$$

とするとモジュラー不変にできるが正則関数と反正則関数が混ざってしまう．これが標題の**正則アノマリー**である．ここで起こっていることを数学的に述べると，η 関数は基本領域 $\mathcal{D}$ 上のある正則直線束の切断を表し，$\mathtt{F}_1^X(t,\bar{t})$ はその正則切断のノルムを表しノルムはモジュラー不変になる，と言える．特に，このノルムは一般に行列式直線束の Quillen 計量と呼ばれるものの一例である．ここに見られる正則・反正則の混合の様子は

$$\partial_{\bar{t}}\partial_t \mathtt{F}_1^X(t,\bar{t}) = \frac{1}{2}\frac{1}{(t-\bar{t})^2}$$

によって表現され，これがこの場合の**正則アノマリー方程式**である．正則アノマリー方程式だけでは，$\mathtt{F}_1^X(t)$ は復元されないが，正則アノマリー方程式とモジュラー不変性を合わせれば $\mathtt{F}_1^X(t)$ が復元される，というのが BCOV の考え方である．

引き続いて $g \geq 2$ の場合を考えると，(2) 式から $\dim \mathcal{M}_g(X,d) = 2g-2 (\neq 0)$ となって (3) 式は少し修正が必要である．この場合，安定写像はパラメータをもって現れるので，$2g-2$ 個の条件を課せば '数え上げ' ができるようになると考える．そこで，$\Sigma_g (g \geq 2)$ から楕円曲線 X への正則写像には Hurwitz の公式に従っていくつかの分岐点が現れることを思い出す．Dijkgraaf は X 上に $2g-2$ 個の点を固定して，これらの点で最も単純な分岐点をもつような正則写像を考えれば '数え上げ' が可能となることに着目した[3]．その結果，数え上げの母関数 $\mathtt{F}_g(t)$ が

$$\mathtt{F}_g(t) \in \mathbf{Q}[E_2(t), E_4(t), E_6(t)] \qquad (5)$$

を満たし，Eisenstein 級数 $E_{2k}(t)$ のウェイトが $6g-6$ の多項式で表されることを発見している．$\mathtt{F}_g^X(t)$ の定義が (3) から変更されているがやはり（準）モジュラー形式で表されることが観察される．

■ 3. 準モジュラー形式 ■

前節で解説したように，モジュラー不変性と正則・反正則の混合に見られる規則性に着目し $\mathtt{F}_1^X(t,\bar{t})$ を決定する（できる）と言うのが BCOV の提案である．その様子を記述するために，もう少し楕円モジュラー形式の性質についてまとめる．以下では上半平面 $\mathbf{H}_+$ の座標を t と表し，$\mathbf{H}_+$ 上にはポアンカレ計量

$$ds^2 = \frac{dtd\bar{t}}{(\mathrm{Im}t)^2} = -\partial_t\partial_{\bar{t}}\log(t-\bar{t})\,dtd\bar{t}$$

を考えるものとする．ポアンカレ計量はケーラー計量で $K(t,\bar{t}) = -\log(t-\bar{t})$ をそのポテンシャルとする．楕円モジュラー形式 $f(t)$ とは $\mathbf{H}_+$ 上の正則関数で Γ の下で次の性質

$$f\Big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\cdot t\Big) = (ct+d)^k f(t)$$

を持つもので，k をウェイトと呼んでいる．そのような関数全体 $M(\Gamma)$ はウェイト 4 とウェイト 6 の Eisenstein 級数 $E_4(t), E_6(t)$ で生成される多項式環 $\mathbf{C}[E_4, E_6]$ に等しいことが知られている．

一方で，(5) 式を見ると $\mathtt{F}_g(t)$ を表すには $E_2(t)$ が必要である．E_2 は

$$E_2\Big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\cdot t\Big) = (ct+d)^2 E_2(t) + \frac{12}{2\pi i} c(ct+d)$$

を満たしモジュラー形式にとても近い振舞いをするがモジュラー形式ではない．これが $\mathtt{F}_g(t)$ に現れるモジュラーアノマリーである．一方，反正則な依存性を $E_2^*(t,\bar{t}) = E_2(t) + \frac{12}{2\pi i}\frac{1}{t-\bar{t}}$ のように導入すると，$E_2^*\Big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\cdot t\Big) = (ct+d)^2 E_2^*(t)$ のように望ましい振舞いが確かめられる．

金子–Zagier はこの事情を次のように定式化している[7]．まず，環 $\mathbf{C}[[q]][\frac{1}{t-\bar{t}}]$ を考え，その元 $f(t,\bar{t})$ で $f\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\cdot t\big) = (ct+d)^k f(t,\bar{t})$ を満たすものをウェイト k の概正則モジュラー形式と定め，概正則モジュラー形式全体を $\widehat{M}(\Gamma) = \oplus_k \widehat{M}_k(\Gamma)$ と表す．概正則モジュラー形式は一般に $f(t,\bar{t}) = \sum_m f_m(t)\frac{1}{(t-\bar{t})^m}$ の形を持つが，これから初項 $f_0(t)$ を取り出す操作を φ_0 と表し，$\varphi_0(\widehat{M}(\Gamma)_k)(=: \widetilde{M}_k(\Gamma))$ の元をウェイト k の準モジュラー形式と定める．$\widetilde{M}(\Gamma) = \oplus_k \widetilde{M}_k(\Gamma)$ と表すとき，$\varphi_0 : \widehat{M}(\Gamma) \to \widetilde{M}(\Gamma)$ は次数付き環の同型であり，さらに

$$\widetilde{M}(\Gamma) = \mathbf{C}[E_2(t), E_4(t), E_6(t)]$$

であることが示される．このとき，$\varphi_0 : E_2^*(t,\bar{t}) \mapsto E_2(t)$ であるから概正則モジュラー形式全体 $\widehat{M}(\Gamma)$ が E_2^*, E_4, E_6 によって生成されることが分かる．従って，E_2^* と E_2 の違いは概正則モジュラー形式で考えるか準モジュラー形式で考えるかの違いとして理解される．

概正則モジュラー形式を考えることが大切なのは，$\widehat{M}(\Gamma)$ に微分作用

$$D_t = \frac{1}{2\pi i}\partial_t + \frac{k}{t-\bar{t}} : \widehat{M}_k(\Gamma) \to \widehat{M}_{k+2}(\Gamma)$$

を考えることができ，$\widehat{M}(\Gamma)$ が微分環になる所にある．準モジュラー形式で対応する微分作用は $\frac{1}{2\pi i}\partial_t$ で表され，これらは同型 φ_0 と可換な作用を定めている．モジュラー形式全体 $\mathbf{C}[E_4(t), E_6(t)]$ では'狭すぎ'てこのような微分作用は定義されないのである．

■ 4. 3 次元カラビ・ヤウ多様体へ ■

前節で扱った概正則モジュラー形式は，高次元のカラビ・ヤウ多様体でも類似が存在すると期待される．高次元ではモジュラー形式について知られていることは皆無に近いが，概正則モジュラー形式の定義の類似を可能な限り作り上げていくと，BCOV の正則アノマリー方程式の定義の準備が整うことになる．

(4-1) パラメータによる変形　楕円モジュラー形式の理論をまとめてみよう．形式が定義される上半平面とそこに作用するモジュラー群は，g_2, g_3 をパラメータとする楕円曲線の族

$$y^2 = 4z^3 - g_2 z + g_3 \qquad (6)$$

とそれの正則 1 形式 $\omega = \frac{dz}{y}$ から作る周期積分 $\big(\int_\alpha \omega, \int_\beta \omega\big)$ に現れる．その概要は，2 つの周期積分の比 $t = \int_\beta \omega / \int_\alpha \omega$ を作るとこれが上半平面に値を取り，周期積分のモノドロミー変換がモジュラー群を定めるというものである．ここで，t は楕円曲線の複素構造を表すパラメータであるが，曲線のパラメータとは $g_2 = \frac{4\pi^4}{3}E_4(t), g_3 = \frac{8\pi^6}{27}E_6(t)$ の関係があり，パラメータ $x := \frac{g_2^3 - 27g_3^2}{1728 g_2^3}$ は楕円 j 関数の逆数 $\frac{1}{j(t)}$ に等しい．

カラビ・ヤウ多様体では，このような変形族が X のミラー多様体として現れ，(6) 式に類似した式を使ってミラー多様体 Y の族が定められる[2]．式のあからさまな表示は与えないが，変形族のパラメータを $x_1, \cdots, x_r$ と表す．今度は正則 3 形式を用いて周期積分を定義し，それらの比を考えて上半平面に対応する周期領域 D への写像が作られる．この領域のパラメータを $t_1, t_2, \cdots, t_r$ とすると，周期積分のモノドロミー性質からこれらの変数に作用するモジュラー群 $\Gamma \subset Sp(2+2r, \mathbf{Z})$ が定められる．ここで，概正則モジュラー形式が定義されることを期待するのであるが，楕円曲線の場合のような理論は知られていない．しかし物理学者は，変形族のパラメータ空間に存在するケーラー幾何学を用いると概正則モジュラー形式の微分環に類似する環が定義できることを見出している．

(4-2) BCOV 環 Bogomolov, Tian, Todorov らによって，カラビ・ヤウ多様体の変形族のパラメータ $x_1, \cdots, x_r$ は少なくとも局所的に複素多様体を表し，さらに Weil–Peterson 計量と呼ばれるケーラー計量を持つことが一般的に知られている[2]．以下ではその計量を $G_{i\bar{j}} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_j}K(x,\bar{x})$ と表す．この計量は上半平面のポアンカレ計量の一般化であり，ポテンシャルの微分 $\frac{1}{t-\bar{t}} = \partial_t \log(t-\bar{t})$ は，概正則モジュラー形式の導入で大切な役割を果たした．3 次元カラビ・ヤウ多様体の場合，このケーラー幾何学は特殊ケーラー幾何学となっていて，Griffiths–湯川結合と呼ばれる正則および反正則な対称テンソル $C_{ijk}(x), C_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}(\bar{x})$ の存在と，それらと曲率テンソルとの関係

$$-R_{i\bar{j}}{}^{l}{}_{k} = G_{i\bar{j}}\delta_k^l + G_{\bar{j}k}\delta_i^l - e^{2K}G^{m\bar{m}}G^{l\bar{l}}C_{ikm}C_{\bar{m}\bar{j}\bar{l}}$$

によって特徴的付けられる．BCOV はこの幾何学を用いて，次の反正則微分が積分可能で，これを積分するテンソル S^{ij}, S^i, S が存在することを示している；

$$\partial_{\bar{i}}S^{jk} = e^{2K}G^{j\bar{j}}G^{k\bar{k}}C_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}, \quad \partial_{\bar{i}}S^k = G_{\bar{i}i}S^{ik},$$

および $\partial_{\bar{i}}S = G_{\bar{i}k}S^k$．ここで，積分 S^{ij}, S^i, S には積分定数 $s^{jk}(x), s^k(x), s(x)$ の不定性が含まれることが後に問題となる．これらの積分を propagator と呼び，そのウェイトを 2 とし，また $K_i = \partial_i K$ のウェイトは 0 であるものとして，

$$\mathcal{R}_{\mathrm{BCOV}} = \mathbf{C}(x)[S^{ij}, S^k, S, K_i]$$

と定め **BCOV 環**と呼ぶことにする．BCOV 環へのモジュラー群 Γ の作用は全く明らかではないが，これが微分環 $\widehat{M}(\Gamma)$ の類似であることは次の性質に見ることができる；

命題 BCOV 環 $\mathcal{R}_{\mathrm{BCOV}}$ には（共変）微分

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - kK_i \pm \Gamma_{i*}^{*}$$

が作用する．但し，$\Gamma_{ij}^{k} = G_{i\bar{m}}\partial_j G^{\bar{m}k}$ とする．

この性質は，山口・Yau[8]によって最初に示唆され最近になって明らかにされたものである[4]．

(4-3) BCOV アノマリー方程式 さて，ようやく本題のアノマリー方程式登場の準備が整った．既に見たようにアノマリー方程式は，正則な母関数 $\mathrm{F}_g^X(t)$ をモジュラー共変な $\mathrm{F}_g^X(t,\bar{t})$ に書き改めるとき，その正則・反正則変数の混ざり方を定めるものである．微分環 $\mathcal{R}_{\mathrm{BCOV}}$ で反正則変数に依存するのは S^{ij}, S^k, S および K_i であって，それらの反正則微分 $\partial_{\bar{i}}$ は特殊ケーラー幾何学で定められている．

定義 $C_{ijk} \in \mathbf{C}(x)$ を Griffiths–湯川結合として $\mathcal{F}_{ijk}^{(0)} = C_{ijk}$,

$$\mathcal{F}_i^{(1)} = \frac{1}{2}S^{jk}\mathcal{F}_{ijk}^{(0)} - \left(\frac{\chi}{24}-1\right)K_i + f_1(x)$$

とし $\mathcal{F}_{ijk}^{(0)}$, $\mathcal{F}_i^{(1)}$ のウェイトを 2, 0 と定める．$D_i\mathcal{F}^{(1)} \equiv \mathcal{F}_i^{(1)}$ の下で $\mathcal{F}^{(g)} \in \mathcal{R}_{\mathrm{BCOV}}$ を

$$\frac{\partial \mathcal{F}^{(g)}}{\partial S^{jk}} = \frac{1}{2}D_jD_k\mathcal{F}^{(g-1)} + \sum_{h=1}^{g-1}D_j\mathcal{F}^{(g-h)}D_k\mathcal{F}^{(h)},$$

$$0 = S^{jk}\frac{\partial \mathcal{F}^{(g)}}{\partial S^k} + S^j\frac{\partial \mathcal{F}^{(g)}}{\partial S} + \frac{\partial \mathcal{F}^{(g)}}{\partial K_j}$$

によって順次定めそのウェイトを $2-2g$ と定める．

上で χ は X のオイラー数を表す．$\mathbf{C}(x)$ を係数とする微分環 $\mathcal{R}_{\mathrm{BCOV}}$ の多項式に関する上記の微分方程式が**正則アノマリー方程式**である．さらに $\tilde{S}^{ij} = S^{ij}, \tilde{S}^i = S^i - S^{ij}K_j$, $\tilde{S} = S - S^iK_i + \frac{1}{2}S^{ij}K_iK_j$ などとうまく再定義することによって，$\mathcal{F}^{(g)} \in \mathbf{C}(x)[\tilde{S}^{ij}, \tilde{S}^i, \tilde{S}]$ とすることが可能で，微分方程式は単純な漸化式に近いものに帰着することが示される[4,5]．従って問題は積分定数 $f_g(x) \in \mathbf{C}(x)$ を決める所に集約される．

BCOV は 1993 年に発表された論文で次の事実を発見し，以来次の予想は多くの具体例で確かめられている．

BCOV 予想 積分定数 $s^{ij}(x), s^i(x), s(x)$ および $f_g(x)$ をある境界条件が満たされるように決めて解 $\mathcal{F}^{(g)}(x,\bar{x})$ を求めることができる．このとき $\varphi_0 : \widehat{M}(\Gamma) \to \widetilde{M}(\Gamma)$ に相当する操作で

準モジュラー形式 $F^{(g)}(x)$ を定め, 1つの周期積分 $\omega_0(x)$ を用いて決める $(\omega_0(x))^{2g-2}F^{(g)}(x)$ は Gromov–Witten 不変量の母関数 $\mathrm{F}_g^X(t)$ を与える.

上の予想に加えて BCOV は $\partial_{\bar{j}}\mathcal{F}_i^{(1)}$ が Quillen 計量が定める Ray–Singer の解析的トージョンに一致することも予想している.

(4-4) 境界条件 Gromov–Witten 不変量の母関数 $\mathrm{F}_g^X(t)$ が, ベルヌーイ数 B_{2k} を用いた形

$$\mathrm{F}_g^X(t) = \frac{\chi}{2}\frac{(-1)^g|B_{2g}B_{2g-2}|}{2g(2g-2)(2g-2)} + \sum_d N_{g,d}q^d$$

を取ることが, 不変量の定義から導かれ, これが BCOV 予想検証の手掛かりとなる. さらに, 近年 Huang, Klemm, Quackenbusch らが conifold 特異点に対応する t の値 t_c で $F^{(g)}(t) = \frac{|B_{2g}|}{2g(2g-2)}\frac{1}{(t-t_c)^{2g-2}} + \mathrm{reg.}$ のように振る舞うことを一般に観察している[6]. これらの境界での振舞いを要請すると, 小さな g の値では積分定数が完全に決定され, アノマリー方程式の解 $F^{(g)}(t)$ が実際に決まることが観察される. また, BCOV 予想から得られる $F^{(1)}(t)$ が Gromov–Witten 不変量の母関数 $\mathrm{F}_1^X(t)$ と一致することが最近 Zinger によって数学的に証明されているようであるが, 一般の $\mathrm{F}_g^X(t)$ については未解決の問題である.

BCOV 予想の検証および応用として, 論文[5]では同じ弦理論を定めるが, 互いに双有理ではないような2つのカラビ・ヤウ多様体 X, X' について $F^{(g)}(t)(g \leq 5)$ の決定が行われている.

■ 5. おわりに ■

正則アノマリー方程式が提案されてから既に15年以上が経過している. Candelas たちが $F^{(0)}(t)$ の計算処方の発見して, その数年後には "ミラー定理" として計算処方が正当化されたのに比して, 正則アノマリー方程式はその難しさが格段に違うようである. 正則アノマリー方程式は '高次元での概正則モジュラー形式の理論' という未だ存在しない理論を必要としているのがその原因と言えよう. 純粋数学者は '高次元での概正則モジュラー形式の理論' など未だよい理論は1つも出ていないと一蹴するであろうが, 我々は理論物理学に端を発し後に数学として完成していった理論がいくつもあることを忘れるべきでないであろう.

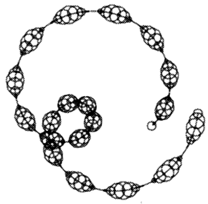
紙面も尽き最後になってしまったが, 2002年以降 X が非コンパクトでトーリック多様体として実現されるカラビ・ヤウ多様体については, 母関数 $\mathrm{F}_g^X(t)$ を不変量の定義に従って計算する処方ができ上がっていて, 位相的 vertex の理論と呼ばれている. この理論は, 正則アノマリー方程式からは '遠く離れた' ミラーの位置にあってそれらの関係は全く明らかではない. ところが, 昨年になって正則アノマリー方程式の側から大きな発見がなされた. 行列模型の厳密解が Eynard と Orantin によって得られ, その解が自動的にアノマリー方程式を満たしかつ境界条件も満たす (らしい) ことが発見されたのである. この場合, '概正則モジュラー形式の理論' は超楕円曲線に関するものになる. 村瀬元彦さんが本特集で解説されているように, 可積分系との密接な関係が現れている.

参考文献

1) M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri and C. Vafa, Kodaira-Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes, *Commun. Math. Phys.* **165** (1994) 311–428.
2) D. Cox and S. Katz, *Mirror Symmetry and Algebraic Geometry*, AMS (1999).
3) R. Djikgraaf, Mirror symmetry and slliptic curves, *Progr. Math.*, **129** (1995) 149–163.
4) M. Alim and J.D. Länge, Polynomial structure of the (open) topological string partition function, arXiv:0708.2886[hep-th] (2007).
5) S. Hosono and Y. Konishi, Higher genus Gromov–Witten invariants of the Grassmannian, and the Pfaffian Calabi–Yau threefolds, arXiv:0704.2928 [math.AG] (2007).
6) 上記論文の参考文献.
7) M. Kaneko and D. Zagier, A generalized Jacobi theta function and quasimodular forms, *Progr. Math.*, **129** (1995) 165–172.
8) S. Yamaguchi and S.-T. Yau, Topological string partition functions as polynomials, *J. High Energy Phys.* no.**7** (2004) 047.

(ほその・しのぶ, 東京大学大学院数理科学研究科)

弦理論とホモトピー代数構造



梶浦 宏成

1. はじめに

素粒子物理学において，その物理のすべて，特に粒子の相互作用の確率を表す散乱振幅を整合的に説明する場の理論を構成することが一つの目標である．場の理論とは，ある空間，あるいは時空 M 上の「場」を扱う理論である．数学の言葉で言えば，M 上の場とは M 上のベクトル束，あるいはより一般に，ファイバー束の，断面のことである．M 上のベクトル束として最も簡単な例が，M 上の自明直線束であり，この場合，その断面とは M 上の関数 ϕ のことである．M の各点 x における関数の値 $\phi(x)$ が，対応する粒子のその点 x に存在する「分量」と関係する．

幾何学において，位相空間 M を考えることと，その上の関数全体を考えることは同値であるという基本定理がある（Gelfand–Naimark）．この定理は，通常の空間の拡張概念の定式化を目的とした非可換幾何学の出発点となった．代数幾何学も同様の思想によって発展してきたと言えよう．M 上の場の理論を考えることは，このような，空間をその上の関数環に置き換えるという思想のさらなる一般化とみることができるだろう．特に，場の理論の量子化（第二量子化と呼ばれる）は，従来の数学にない新しい数理的構造を提案するものとして，様々な方面で注目され始めている．

場の理論は，「作用汎関数」と呼ばれるものを定義することによって決定されるが，「ほしい理論」の持つ対称性から作用汎関数の候補を効果的に絞り込むことができることがよくある．特に重要であるゲージ対称性を持つ場の理論を量子化する方法の最も強力な手法の一つとして，BRST 量子化のある一般化を与える Batalin–Vilkovisky (BV) 形式と呼ばれるものがある．BV 形式によってゲージ対称性を持つ場の理論はある空間（場の汎関数の空間）$\mathcal{O}$ 上の，二乗するとゼロとなる作用素

$$\delta : \mathcal{O} \to \mathcal{O}, \quad \delta^2 = 0, \qquad (1)$$

を定義する．

このような場の理論の「半古典的」構造*1) を記述するものとしてホモトピー代数と呼ばれるものがある．例えば，ホモトピー代数の典型例である A_∞ 代数は，もともとは位相幾何学のホモトピー論において J. Stasheff によって導入されたものであるが[7]，現在では場の理論，特に弦理論と関連する数理物理において基本的な道具の一つとして応用されている．本稿では，このようなホモトピー代数の，場の理論，そして弦理論との関係および応用のいくらかについて紹介したい．簡単のため，（次数付き）ベクトル空間は $\mathbb{C}$ 上で考える．$\pm$ と記した符号はすべて正確な定義により決定されるものであるが本稿で省略するものとする．参考文献は原論文よりも解説記事等を優先した．

*1) 半古典的の意味は後で述べる．

2. A_∞ 代数（ホモトピー結合代数）

いろいろ等価な定義の仕方があり，より簡略な記述も可能ではあるが，一番それの持つ意味を反映し，直接的な定義は以下のように与えられる．

定義 2.1（A_∞ 代数）　$(A, \mathfrak{m})$ が A_∞ 代数であるとは，$\mathbb{Z}$ 次数付きベクトル空間*2) $A = \oplus_{r\in\mathbb{Z}} A^r$ とその上の次数 $(2-k)$ の多重線形写像 $m_k : A^{\otimes k} \to A$（$A$ の元を k 個与えたときに A の元一つを与える写像）の集まり $\mathfrak{m} := \{m_k\}_{k\geq 1}$ であって，$n \geq 1$ に対して以下の関係式を満たすものとする．

$$\sum_{k+l=n+1} \sum_{i=1}^{k} \pm m_k(o_1, \cdots, o_{i-1}, m_l(o_i, \cdots, o_{i+l-1}), o_{i+l}, \cdots, o_n) = 0. \tag{2}$$

ここで $o_i, i = 1, \cdots, n$ はそれぞれ次数について斉次の A の元とした*3)．

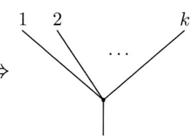
上の関係式の $n = 1$ の場合より $(m_1)^2 = 0$，つまり (A, m_1) が複体を成す．m_2 は代数 (A, m_2) の積構造を与えるが，関係式 (2) の $n = 3$ の場合から，$m_3 = 0$ のときには積 m_2 が結合的，

$$m_2(m_2(o_1, o_2), o_3) = m_2(o_1, m_2(o_2, o_3)), \tag{3}$$

となる．m_3 が自明でないときには一般には m_2 は結合的にはならず，関係式 (2) の $n = 3$ の m_1 と m_3 から成る項によって，「m_2 はホモトピー結合的」，「m_3 がそのホモトピー」であると言われる．このことがホモトピー結合代数という名前の由来であり，A_∞ の A も結合的（**A**ssociative）の A である．m_3 が自明であるかどうかに関わらず，関係式 (2) の $n = 2$ の場合は微分 m_1 が積 m_2 に関してライプニッツ則を満たすことを意味する*4)．

ホモトピー代数とは一般に，上の A_∞ 代数のように，通常の積 m_2 に加え高次の積 $m_3, m_4, \cdots$ を持ち，それらが微分 m_1 と共に高次のホモトピーとして意味づけられる関係式（(2) 式の類似）を満たすもののことを言う．

さて，このような（高次の）積 $m_2, m_3, m_4, \cdots$ たち同士の演算を表すのにしばしば樹木グラフ（tree graph）*5) が用いられる[4,7]．

$m_k \Leftrightarrow$ 

(4)

場の理論をご存知の方にはこれが場の理論の相互作用項を記述するファインマングラフに見えないであろうか？ 一方，A_∞ 関係式 (2) は，BV 形式における $\delta^2 = 0$（関係式 (1)）と対応する．この 2 つのことを説明するために，次節では A_∞ 代数の超多様体による幾何学的な理解について紹介する．一方，この樹木グラフを「太らせる」と開弦の相互作用の図に見える．このような弦理論との関係については 4.1 節で説明する（図 1）．その内容は，以下をとばして 4 節から独立に読むこともできる．

2.1 A_∞ 代数の超多様体による記述

まず準備運動として，d 次元平面 $\mathbb{R}^d$ 上のベクトル場を考えよう．$\mathbb{R}^d$ の座標を $x^1, \cdots, x^d$ として，ベクトル場は一般に

$$\delta := \sum_{i=1}^{d} c^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

と書ける．ここで，$\mathbb{R}^d$ 上の関数 c^i を冪展開し，

$$\delta := \sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{k=0}^{\infty} c^i_{j_1 \cdots j_k} (x^{j_1} \cdots x^{j_k}) \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{5}$$

と表そう*6)．以下簡単のため，c^i が多項式の場

---

*2)　$\mathbb{Z}$ でラベル付けされたベクトル空間の集まりのこと．

*3)　m_k の次数が $(2-k)$ であるとは，o_i の次数を $|o_i| \in \mathbb{Z}$ と表すと，$m_k(o_1, \cdots, o_k)$ の次数が $|o_1| + \cdots + |o_k| + (2-k)$ であることを意味する．

*4)　高次の積が自明，$m_3 = m_4 = \cdots = 0$，な A_∞ 代数 $(A, \mathfrak{m})$ は次数付き微分代数（differential graded algebra）と呼ばれる．例えば，多様体 M 上の微分形式の空間 $\Omega(M)$ は，外微分作用素 d を m_1，ウェッジ積 $\wedge$ を m_2 とすることによって次数付き微分代数を成す．

*5)　ループを持たないグラフのこと．グラフとは点を線分で結ぶことによってできる図のこと．

*6)　下付き/上付き添字の組は $\sum$ の記号を略して自動的に和をとる（縮約と呼ばれる）規則に従う．

合，つまり十分大きい k に対して複素数係数が $c^i_{j_1\cdots j_k}=0$ である場合について議論しよう．一方，原点で消えるベクトル場は $k=0$ の場合の係数が $c^i_\emptyset=0$ となるものであることに注意する．このようなベクトル場 δ は $x^1,\cdots,x^d$ の多項式全体の空間 $\mathbb{C}[x^1,\cdots,x^d]$ に作用する．

$$\delta:\mathbb{C}[x^1,\cdots,x^d]\to\mathbb{C}[x^1,\cdots,x^d].$$

以上の議論を，座標 $x^1,\cdots,x^d$ が $\mathbb{Z}$ 次数付きの場合に拡張する．つまり，それぞれの $i=1,\cdots,d$ に対して次数 $\deg(x^i)\in\mathbb{Z}$ を割り振る．そして，次数 1 のベクトル場 δ で*7)，原点で消えるもので，さらに $\delta^2=0$ を満たすものを，最近の慣習にならって**ホモロジー的ベクトル場**と呼ぶ．

最後に，これらの議論を，座標が非可換な場合に拡張する．ここで，座標が非可換とは，多項式の生成元 $x^1,\cdots,x^d$ に $x^ix^j=x^jx^i$，あるいは $\mathbb{Z}$ 次数付きのときは $x^ix^j=(-1)^{\deg(x^i)\deg(x^j)}x^jx^i$，の関係式を入れず，純粋に非可換代数として取り扱うという意味である．このとき，この $\mathbb{Z}$ 次数付き非可換 $\mathbb{R}^d$ 上のホモロジー的ベクトル場 δ が A_∞ 代数 $(A,\mathfrak{m})$ の積構造の幾何学的な記述を与えることとなる．A を $\mathbb{Z}$ 次数付き d 次元ベクトル空間とし，特にその基底 $e_1,\cdots,e_d$ の次数を $\deg(e_i)+\deg(x^i)=1$ とする．このとき，δ を (5) と同様に冪展開して表すと，

$$m_k(e_{j_1},\cdots,e_{j_k})=\sum_{i=1}^{d}c^i_{j_1\cdots j_k}\cdot e_i \qquad (6)$$

がその対応を与える．条件 $\delta^2=0$ の A_∞ 関係式 (2) との等価性も直接示される[2)]．一般には，A_∞ 代数としては A が無限次元の場合も扱われる．

2.2 場の理論との対応

紙面の都合上，場の理論の解説まで系統立てて説明することは避け*8)，それとの対応を述べるに留める．以下簡単のため座標を非可換化する前の（次数付き）可換な場合について述べる*9)．

まず座標 $x^1,\cdots,x^d$ が場の理論の場とみなされる（一般には $d=\infty$）．ここで，場 x^i の次数は BV 形式におけるゴースト数と対応する．ホモロジー的ベクトル場 δ は場の汎関数の空間 $\mathcal{O}=\mathbb{C}[x^1,\cdots,x^d]$ に作用し，BV 形式の δ（(1) 式）となる．この複体 $(\mathcal{O},\delta)$ のコホモロジー*10)が物理的観測可能量の空間として定義される．

では，場の理論の作用汎関数にあたるものは何であろうか？ 実は，場の理論と関係するホモトピー代数構造はさらに付加的な構造を持つ．BV 形式において，$\mathbb{Z}$ 次数付き $\mathbb{R}^d$ 上のある非退化行列 $\{\omega^{ij}\in\mathbb{C}\}_{i=1,\cdots,d}$ が双線形写像 $\{\ ,\ \}:\mathcal{O}^{\otimes 2}\to\mathcal{O}$ を $\{f,g\}:=\sum_{i,j=1,\cdots,d}\pm\omega^{ij}(\partial f/\partial x^i)(\partial g/\partial x^j)$ によって定義する．そして，ある関数 $S\in\mathcal{O}$ で

$$\delta=\{S,\ \}$$

となるものが存在する*11)．この S が作用汎関数に対応するものであり，S は 2 次以上の多項式なので，その 2 次の項が運動項，3 次以上の項が相互作用項となる．上の議論を場が非可換な場合にも自然に拡張することができる．このとき，(4) 式の図の m_k に対応する樹木グラフに関して，その k 本の入口と 1 本の出口が対等なものとして扱われ，それが作用汎関数 S の $(k+1)$ 次の項（$(k+1)$ 点相互作用項）を与えることになる[2)]．

2.3 ホモロジー的摂動理論と場の理論の摂動論

2 つの A_∞ 代数を比べるには，その間の写像を定義する必要がある．まず 2.1 節初めの設定に戻って，A_∞ 写像を導入するための準備運動をしよう．$\mathbb{R}^d$ の座標を $(x^1,\cdots,x^d)$，$\mathbb{R}^{d'}$ の座標を $(y^1,\cdots,y^{d'})$ として，$\mathbb{R}^d$ から $\mathbb{R}^{d'}$ への以下で与えられる非線形写像 $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{d'}$ を考えよう．

$$y^i=f^i(x)=\sum_{k=0}^{\infty}f^i_{j_1\cdots j_k}(x^{j_1}\cdots x^{j_k}).$$

---

*7) $\mathbb{C}[x^1,\cdots,x^d]$ のそれぞれの単項式は，x^i たちの次数の和によって次数付けられる．例えば $\deg(x^{j_1}\cdots x^{j_k})=\deg(x^{j_1})+\cdots+\deg(x^{j_k})$．そして，それぞれの単項式の次数を 1 増やす写像 $\delta:\mathbb{C}[x^1,\cdots,x^d]\to\mathbb{C}[x^1,\cdots,x^d]$ を次数 1 の写像を呼ぶ．

*8) 本誌 2007 年 8 月号に入門的解説記事がある．

*9) 後で述べるようにこれは L_∞ 代数の場合に対応する．

*10) $\mathcal{O}$ の元で δ を作用させるとゼロになるものの成すベクトル空間をベクトル空間 $\delta(\mathcal{O})$ で割ったベクトル空間のこと．

*11) つまり，BV 形式はシンプレクティック幾何学の次数付き版の構造を持ち，対応するポアソン括弧 $\{\ ,\ \}$ に関して，δ は S のハミルトンベクトル場として理解される[2)]．

この f による引き戻し写像 $f^* : \mathbb{C}[y^1, \cdots, y^{d'}] \to \mathbb{C}[x^1, \cdots, x^d]$ が

$$(f^*a)(x) = a(f(x)), \quad a \in \mathbb{C}[y^1, \cdots, y^{d'}]$$

によって得られるのは通常の幾何学の通りである．

さて，A_∞ 代数とは，$\mathbb{Z}$ 次数付き非可換 $\mathbb{R}^d$ とその上のホモロジー的ベクトル場 δ の組のことであった．2つの A_∞ 代数の間の写像は上の非線形写像 f の次数付き非可換版（それをまた f と表す）のうち，原点を保ち*12)，次数を保ち（＝次数0の），ホモロジー的ベクトル場を保つもの

$$\delta' \circ f^* = f^* \circ \delta \tag{7}$$

（$\mathbb{C}[y^1, \cdots, y^{d'}]$ に作用する等式）として定義するのが自然であろう．これを先ほどの A_∞ 構造の場合 (6) の場合と同様に，$\mathbb{Z}$ 次数付きベクトル空間 A と A' の上の言葉で定義したものが A_∞ **写像** $\mathfrak{f} : (A, \mathfrak{m}) \to (A', \mathfrak{m}')$ と呼ばれるものとなる[2]．特に，f の係数 $f^i_{j_1 \cdots j_k}$ に対して，

$$f_k(e_{j_1}, \cdots, e_{j_k}) = \sum_{i=1}^{d'} f^i_{j_1 \cdots j_k} {e'}_i$$

で定められる多重線形写像 $f_k : A^{\otimes k} \to A'$ の $k=1$ のもの，$f_1 : A \to A'$, は条件 (7) より

$$m'_1 f_1 = f_1 m_1$$

を満たす．つまり，f_1 は複体の間の写像 $f_1 : (A, m_1) \to (A', m'_1)$ となる．f_1 が複体のコホモロジーの同型を与えるとき，$\mathfrak{f}$ を A_∞ **擬同型写像**と呼ぶ．このとき，必ず逆向きの A_∞ 擬同型写像 $\mathfrak{f}' : (A', \mathfrak{m}') \to (A, \mathfrak{m})$ が存在することから，A_∞ 擬同型写像は A_∞ 代数の間の同値関係を与える．

以下のものがホモトピー代数の基本定理である．

定理 2.2（A_∞ 代数の極小模型定理）任意の A_∞ 代数 $(A, \mathfrak{m})$ に対し，その複体 (A, m_1) のコホモロジー $H(A)$ 上の A_∞ 構造 $\mathfrak{m}'$ と A_∞ 擬同型写像 $\mathfrak{f} : (H(A), \mathfrak{m}') \to (A, \mathfrak{m})$ が存在する．

この $(H(A), \mathfrak{m}')$ を $(A, \mathfrak{m})$ の**極小模型**と呼ぶ．

特に，ホモロジー的摂動理論[2] によって，この極小模型の樹木グラフによる具体的構成法が知られている．これが実は場の理論の摂動論における tree（＝対応するファインマングラフにループがない＝半古典的）の散乱振幅の計算そのものなのである．結論として，**等価な tree の散乱振幅を与える作用汎関数たちは同値な A_∞ 構造を持つ．**このように，ホモトピー代数は場の理論の半古典的理論を記述する．

3. いろいろなホモトピー代数

前節の超多様体の言葉を使って，以下に A_∞ 代数以外のホモトピー代数のいくつかについて紹介する（詳しくは文献 4)）．

3.1 L_∞ 代数（ホモトピーリー代数）

これは実は既に議論したものである．$\mathbb{Z}$ 次数付き $\mathbb{R}^d$ を考えよう．つまり，2.1 節での，A_∞ 代数を議論するために非可換する前の段階であり，座標たちは代数として**次数付き可換性** $x^i x^j = (-1)^{\deg(x^i)\deg(x^j)} x^j x^i$ を満たすものとする．このとき，この $\mathbb{Z}$ 次数付き $\mathbb{R}^d$ とその上のホモロジー的ベクトル場 δ が L_∞ 代数と呼ばれるものを定義する．(5) と同様に δ を冪展開表示すると，その係数たち $c^i_{j_1 \cdots j_k}$ は次数付き可換性より添字 $j_1 \cdots j_k$ について次数付き対称となる．(6) 式のときと同様に，$c^i_{j_1 \cdots j_k}$ に対応する多重線形写像を定義し，それを $l_k : L^{\otimes k} \to L$ と表そう．A_∞ 代数のときと同様，条件 $\delta^2 = 0$ から l_1 が微分であり，l_2 に関してライプニッツ則を満たすものとなる．一方，m_2 のホモトピー結合性に代り l_2 は「ホモトピーヤコビ律」を満たすものとなる．つまり，l_3 が l_2 のヤコビ律の破れに関するホモトピーを与え，$l_3 = 0$ のときは l_2 は超リー括弧を定義する．

3.2 open-closed ホモトピー代数（OCHA）

$\mathbb{Z}$ 次数付き $\mathbb{R}^d$, あるいは $\mathbb{Z}$ 次数付き非可換 $\mathbb{R}^d$ の代わりに，それら両方が混ざったものを考えることもできる．つまり，$\mathbb{Z}$ 次数付き $\mathbb{R}^{d+d'}$ として次数付き座標 $x^1, \cdots, x^d, y^1, \cdots, y^{d'}$ を導入し，これらで生成される代数に（y^i たちは非可換であるが）x^i 同士は次数付き可換，x^i と y^j も次数付

*12) 実数係数 $f^i_{j_1 \cdots j_k}$ が $k=0$ の場合について $f^i_\emptyset = 0$ であれば f は原点を保つ写像となる．

き可換，という関係式を入れる．このような超多様体上にホモロジー的ベクトル場を考えることに対応して，**open-closed ホモトピー代数**が定義される．ホモトピー代数と呼ぶからには当然，2.3 節における A_∞ 代数の極小模型定理やホモロジー的摂動理論の類似がこの場合にも成り立つ．

4. 弦理論との関係

弦には開弦と閉弦の 2 種類がある．開いた弦は線分，閉じた弦は円周 S^1 である．これらの弦，つまり 1 次元の物体の軌跡は 2 次元面を成し，弦の相互作用は 2 次元面によって記述される．弦理論とは，このような 2 次元面 Σ 上の適切な場の理論を与えることである．特に，少なくとも共形変換（2 次元なのでそれは正則変換と同じ）を持つ場の理論を考え，共形変換で移り合う 2 次元面を同一視する．例えば閉弦，開弦の無限遠方からの挿入は共形変換によってそれぞれ 2 次元面の内部の点，境界上の点に写される（図 1）．弦理論は弦の状態ベクトル空間 V と，それぞれの 2 次元面の共形同値類 $[\Sigma]$ に付随する相関関数として多重線形写像 $V^{\otimes k} \to \mathbb{C}$ を定義する．最も基本的な量である弦の散乱振幅は，相関関数の，2 次元面の共形同値類の空間上の積分として定義される．

さて，多様体 M の中を運動するある弦理論を考えよう．M 上の場の理論の散乱振幅は，その作用汎関数の経路積分によって与えられ，それはファインマングラフ（によって特徴づけられる数）の足し上げとして計算される．弦理論は，このファインマングラフを 2 次元面の共形同値類に置き換え，ファインマングラフの足し上げを 2 次元面の共形同値類に関する足し上げ＝積分に置き換える．2 次元面を連続変形させて「細らせる」と様々な（ファインマン）グラフが現れることが分かるだろう（図 2）．このような対応から，弦理論において**量子的**であるとは，2 次元面たちで，それらを細らせてできるグラフにループを含むものを考えることを言う．逆に，ループを含まない 2 次元面のみを考えることを **tree**，あるいは**半古典的**と呼ぶ．

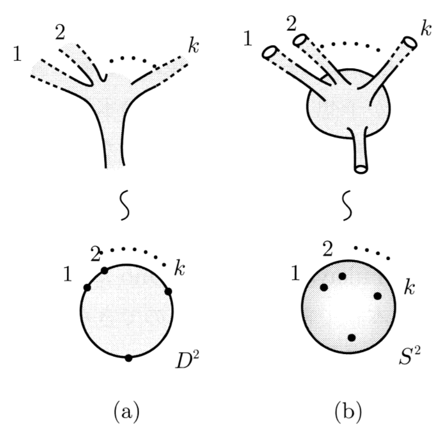


図 1 (a): m_k に対応する 2 次元面，(b): l_k に対応する 2 次元面．

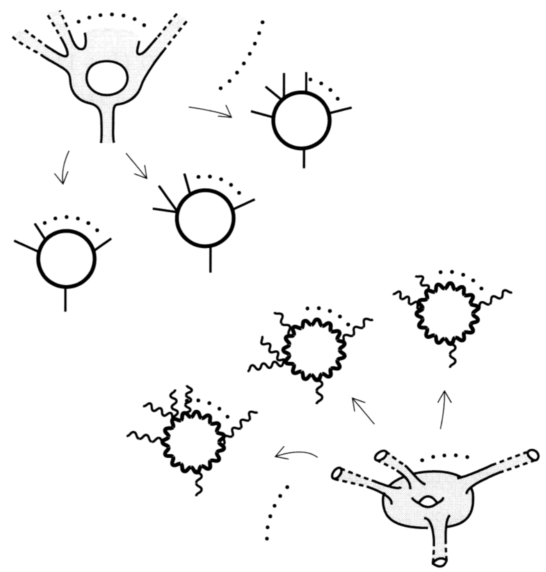
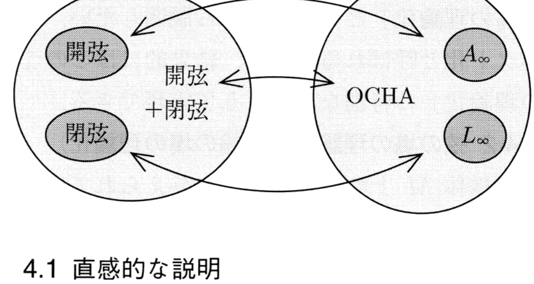


図 2 開弦，閉弦の伝播をそれぞれ棒線，波線で表し，それらのループを太線で表した．

ここで，tree の弦理論とホモトピー代数の間に以下の対応がある．



4.1 直感的な説明

まず，tree の開弦の理論において扱う 2 次元面

は境界に（開弦の挿入に対応する）点を持つ円盤 D^2 である（図 1 (a)）．tree の開弦の $(k+1)$ 点散乱振幅は，相関関数の $(k+1)$ 点付き円盤の共形同値類の空間上の積分として与えられる．同様に，tree の閉弦において扱う 2 次元面は（閉弦の挿入に対応する）内点を持つ球面 S^2 である（図 1 (b)）．tree の閉弦の $(k+1)$ 点散乱振幅は，相関関数の $(k+1)$ 点付き球面の共形同値類の空間上の積分として与えられる．これらの tree の開弦，閉弦の $(k+1)$ 点散乱振幅がそれぞれ A_∞ 構造の m_k，L_∞ 構造の l_k と対応することになる．

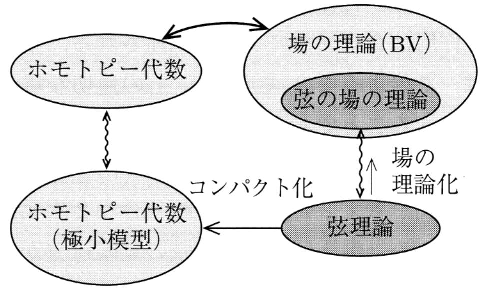
開弦の場合と閉弦の場合の大きな違いは以下の通りである（cf. 図 1）．まず開弦の場合，開弦の挿入は D^2 の境界 S^1 にあり，その順番が巡回性を保つものを考える．一方閉弦の場合，ある $(k+1)$ 点付き S^2 があると，それらの $(k+1)$ 点の内の 2 点を入れ替えたものが必ず存在する．これらの $(k+1)$ 点 S^2 に対する相関関数を積分（平均）したものである閉弦の $(k+1)$ 点散乱振幅，そして対応する l_k は，従って次数付き可換となるのである．tree の開弦と閉弦の混在した系の場合，上の開弦のみ，閉弦のみの場合に加え，境界上と内部の両方に点を持つ D^2 が含まれる．この場合も同様に，内部の点に付随する要素が次数付き可換となり，3.2 節の OCHA の定義にたどり着く．

さて，tree の弦理論に対応するホモトピー代数はこれで尽きるわけであるが，これらに対応するホモロジー的ベクトル場の $\delta^2=0$ の条件はどこから来るのであろうか？ これは 2 次元面の共形同値類の空間のコンパクト化によって直接説明することができる[4)]が，本稿ではせっかく初めに場の理論とホモトピー代数の関係を述べたので，「弦理論の場の理論化」という立場から説明したい．コンパクト化と呼ばれる操作は，結果的にはこの「場の理論化」の特別な場合として実現できる．

4.2 弦の場の理論（弦理論の場の理論化）

多様体 M 上の弦理論が一つ与えられているとしよう．これに対する（唯一つではない）弦の場の理論とは M 上の場の理論であり，その場の理論としての散乱振幅がもともとの弦理論の散乱振幅と一致するもののことを言う．弦の場の理論は，通常 2 次元面の共形同値類の空間の余次元 1 以上の境界による分解を与えることによって構成され，その構成より，弦の場の理論は直接 BV 形式によって扱われることとなる[*13)]．よって，この弦の場の理論の tree の部分に注目することにより $\delta^2=0$ の条件が従う．

ここで 2.3 節の結論などと結びつけることによって以下を得る．**tree の弦の場の理論の持つホモトピー代数構造の極小模型は対応する弦理論の散乱振幅を与える．**



4.3 位相的弦理論への応用

位相的弦理論と呼ばれるクラスの弦理論は通常の弦理論と比べて大きい対称性を持つことから理論の持つ情報が小さく，数学としての結果が得られやすい．位相的弦理論の場合も，その tree の理論はホモトピー代数的構造によって支配される．例えば，位相的弦理論に対応する弦の場の理論が同様の意味で構成される．特に最近では，ミラー対称性の tree の開弦に関する構造に対応するものとして，ホモロジー的ミラー対称性（Kontsevich[5)]）と呼ばれるある 2 つの圏の持つ A_∞ 構造の同値性が予想され，その予想の本質的理解にはホモロジー的摂動理論などが鍵となる気配がある（文献 3, 8）とその参考文献）．そこでの一方の A_∞ 構造を持つ圏である深谷 A_∞ 圏[1)]の定式化に関しては現在 Fukaya–Oh–Ohta–Ono によって進行中である．本稿で解説することのできなかった幾何学に付随する A_∞ 圏としてもう一つ，上の深谷 A_∞ 圏と関係する，Fukaya–Oh'97 によるモース

*13) このような弦の場の理論の構成の一般論は，特に Zwiebach によって構築されてきた（文献 2）の参考文献）．

ホモトピーの A_∞ 圏がある[1,3]．

OCHA はある種の tree の開弦・閉弦対応，つまり tree の開弦に付随する構造と tree の閉弦に付随する構造の間の関係を与える．例えば Kontsevich による変形量子化の肯定的な解決[6]が，OCHA の応用例と見ることができる[4]．一方，ミラー対称性における状況では，OCHA は tree の閉弦に付随する構造の等価性としてより古くから定式化されていたミラー対称性の，ホモロジー的ミラー対称性からの導出を与えることが期待できる．

最後に，本稿では tree の弦理論の持つ構造に注目したが，弦理論の持つ構造をすべて取り込むには，量子的，つまりループを含む弦理論に対応する代数構造を，本稿で述べたホモトピー代数の拡張された概念として定式化する必要がある．これについては，その幾何学への応用を込めて現在やっと始まりつつあり，今後の進展が期待される．

参考文献

1) K. Fukaya, “Morse homotopy, A^∞-category, and Floer homologies”, Proceedings of GARC Workshop on Geometry and Topology ’93 (Seoul, 1993), 1–102, Lecture Notes Ser., **18**, Seoul Nat. Univ., Seoul, 1993.

2) H. Kajiura, “Noncommutative homotopy algebras associated with open strings”, *Reviews in Math. Phys.* **19** (2007) 1–99, math.QA/0306332.

3) H. Kajiura, “Homological perturbation theory and homological mirror symmetry”, To appear in Special volume on “Higher Structures in Geometry and Physics”, Progress in Math., Birkhäuser.

4) H. Kajiura and J. Stasheff, “Homotopy algebra of open-closed strings”, *Geometry & Topology Monographs* **13** (2008) 229–259, hep-th/0606283.

5) M. Kontsevich, “Homological algebra of mirror symmetry”, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol.**1**, **2** (Zürich, 1994), 120–139, Birkhäuser, Basel, 1995.

6) 前田吉昭，梶浦宏成，“弦理論と変形量子化”，数学，第 55 巻第 3 号 (2003), 245–265.

7) M. Markl, S. Shnider, J. Stasheff, *Operads in algebra, topology and physics*, Mathematical Surveys and Monographs, 96. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. x+349 pp.

8) C.I. Lazaroiu, “D-brane categories”, *Int. J. Mod. Phys.* A **18** (2003) 5299, hep-th/0305095.

（かじうら・ひろしげ，千葉大学大学院理学研究科）

位相的弦理論と特異点理論，行列因子化



高橋　篤史

1. はじめに

行列因子化（**matrix factorization**）という聞きなれない言葉を説明するために，次の身近な問題から始めることにしましょう．

> **問題 1**　方程式
>
> $x^2 = -1$
>
> を解け．

もちろん，x は実数の範囲では存在しませんね．このため，i という 2 乗して -1 になる「数」を実数に付け加えて，新たに**複素数**という数概念が導入されました．i のような「虚数」を考えて矛盾が生じないだろうか，と疑問に思ったことはありませんか？

このような考え方が矛盾なく定義できる様子を，実数 $\mathbb{R}$ を成分とする 2 次正方行列を考えることで理解することができました．具体的には，

$$I := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

という**行列**を与えると，2 乗して「-1」になりますね．正確には 2 次の単位行列 E_2 を用いて

$$I^2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -E_2$$

です．ここで集合 $\mathcal{C}$ を

$$\mathcal{C} := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} ; a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

と定めると，任意の $\mathcal{C}$ の元 A は，複素数のように 2 つの実数 $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ を用いて

$$A = a_1 E_2 + a_2 I$$

と書けることがわかります．とくに，行列 $B = b_1 E_2 + b_2 I$ に対して，掛け算 AB が

$$AB = (a_1 b_1 - a_2 b_2) E_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) I$$

となり，交換法則 $AB = BA$ が成り立つこともわかります．

さらに A が零でない，つまり a_1, a_2 が同時に零でないとすると，A は逆行列

$$A^{-1} := \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

を持ち，したがって $A \cdot A^{-1} = E_2 = A^{-1} \cdot A$ を満たします．ですから，零以外の任意の $\mathcal{C}$ の元が積に関する逆元を持つことがわかり，$\mathcal{C}$ は四則演算をもつ集合*1) として複素数と同じもの*2) となっています．行列を用いることで，複素数が実数のみで記述できることがわかりました．

このように，「数」としては平方根を取ることができないものでも，「行列」を用いることで平方根

*1)　体と呼びます．
*2)　体の**同型写像**ができます．

を取ることが可能になります．そのような平方根を含めて考えると，より豊かな「数」の体系が現れることが，上の例からなんとなく想像できますね．

少し難しい例として，次の問題を考えましょう：

問題 2　方程式

$$(f(x))^2 = x^3$$

を解け．

これも $f(x)$ が x の多項式という条件を課したなら，もちろん解を持ちません．しかし行列を用いると，

$$\begin{pmatrix} 0 & x^3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & x^3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = x^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

というように，多項式の範囲で平方根をとることができます．他にも，

$$\begin{pmatrix} 0 & x^2 \\ x & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & x \\ x^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x^3 & 0 \end{pmatrix}$$

といった行列も，2 乗して x^3 になることはすぐわかるでしょう．

このように，ある数の体系[*3)] R とそれに属する数 f の組 (R, f) に対して行列の範疇で平方根 Q をとること，を行列因子化と呼びます．先に与えた 2 つの例では，実数と -1, x の多項式の全体と x^3, が (R, f) を与えます．行列因子化の全体（つまり $Q^2 = f$ となる Q すべての集まり）がどのような性質を持っているかを調べることが基本的問題です．

ここで挙げた例，x の多項式の全体と x^3 の組に対する行列因子化は，数学・物理においてとても重要な役割を果たす最も簡単な例であり，この一般化は筆者を含む多くの専門家が現在非常に熱心に研究しています[*4)]．この解説記事では，行列因子化に関する最先端の数学・物理の雰囲気を伝えようと思います．

*3)　四則演算のうち割り算を除いたものとして体系化された，**環**という代数概念を用います．

*4)　まさに今，筆者はカナダのバンフにある研究所において行列因子化の国際研究集会での講演を終え，この原稿に取り組み始めたところです．

2. 超弦理論

位相的弦理論を説明するために，まず超弦理論の説明から始めたいと思います．標語的に言うならば，**超弦理論**とは「すべての物質・空間は 1 次元の自由度を持った弦の運動によって記述され，我々の観測する粒子はその弦の振動で表される」とする物理理論です．量子力学と重力理論を統一的に記述する「万物の理論」の有力な候補として活発に研究されてきました．

数学的整合性のため，超弦理論が矛盾なく定義できるためには時空が 10 次元でなければならない，ということが知られています．その一方で，経験的に私たちの住んでいる時空は 4 次元であることも知っています．この差を埋めるために，超弦理論により要請される 10 次元時空は 4 次元時空と 6 次元空間にわかれていて，6 次元空間は非常に小さくて見えないために普段は残りの 4 次元時空だけ認識している，と解釈します．

4 次元時空上で電子・光子・クォークといった素粒子たちを支配する統一理論は，$N = 1$[*5)] の超対称性を持った場の理論として得られると考えられています．超弦理論からこの $N = 1$ の超対称性を持った場の理論を導出するためには，残りの 6 次元空間は**カラビ–ヤウ多様体**であることが要請されます．なぜなら，4 次元時空（space time）で $N = 1$ の超対称性を持つ理論は，6 次元空間を標的空間とする世界面上（world sheet）で $N = 2$ の超対称性を持つ共形場理論から得られるのですが，この $N = 2$ 超共形場理論が再び数学的に矛盾なく定義できるために「カラビ–ヤウ多様体」という性質が必要だからです．

3. $N = 2$ ランダウ–ギンツブルグ理論

このようにして $N = 2$ 超共形場理論の研究が重要となります．しかしながら，超弦理論からカラビ–ヤウ多様体を経由して構成するシグマ模型と

*5)　N は超対称性の数を表しますが，ここではこれ以上説明しません．

呼ばれる $N=2$ 超共形場理論は難しく，これを厳密に解析するのは極めて困難であることが知られています．そのため同値な $N=2$ 超共形場理論を与える別の理論を構成・研究することが試みられ，超曲面特異点を出発点にした，$N=2$ **ランダウ–ギンツブルグ理論**と呼ばれる理論が導入されました．これは，スーパーポテンシャルと呼ばれる複素解析函数から出発して，その代数的・幾何学的性質を解析することにより，理論の真空・状態・相互作用などすべての物理量を得ようと試みる理論です．

具体例で少し説明しましょう．まず，「場の空間」として複素数係数の1変数多項式全体のなす環 $\mathbb{C}[x]$ を考えます．そして，スーパーポテンシャルを $f(x)=x^{n+1}$ で与えます．これに対する $N=2$ ランダウ–ギンツブルグ理論の真空は，スーパーポテンシャルの停留点，すなわち $df/dx=(n+1)x^n=0$ を満たす点です．これは $x=0$ をただ1点と思うのではなく，n 個の縮退した点と考えます．そこで，この縮退の情報を失わないように，カイラル環と呼ばれる[*6]「真空のなす環」$Jac(f) := \mathbb{C}[x]/(x^n)$ を考えます．通常の「1点」に対するカイラル環は $\mathbb{C}$ となるので，$Jac(f)$ により単なる1点以上の情報を持つことができます[*7]．より一般には，スーパーポテンシャルが多項式 $f(x_1,\cdots,x_n)$ で与えられたとき，カイラル環は $Jac(f) := \mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]/(\partial f/\partial x_1,\cdots,\partial f/\partial x_n)$ となります．

2つの真空が与えられたときに，つまり $Jac(f)$ の元 x^i, x^j に対して，それらの間にどのような相互作用があるかは**留数**（residue）

$$(x^i,x^j)\mapsto \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint x^i\cdot x^j\frac{dx}{x^n}$$

により決まります．これは**2点函数**と呼ばれ，数学的には環 $Jac(f)$ 上に定まる非退化かつ対称な双線型形式のことです．

スーパーポテンシャルが多項式 $f(x_1,\cdots,x_n)$ で $f(x_1,\cdots,x_n)$ で与えられたときには

$$Jac(f) := \mathbb{C}\left[x_1,\cdots,x_n\right]\Big/\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

が有限次元複素ベクトル空間となるものを考えると，留数を一般化したグロタンディーク留数（Grothendieck's residue symbol）

$$(h(x),g(x))\mapsto \mathrm{Res}_{\mathbb{C}^n}\begin{bmatrix} h(x)g(x)dx_1\ldots dx_n \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\cdots\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

が2点函数になります．

$Jac(f)$ と2点函数の組は，数学的には**フロベニウス（Frobenius）環**と呼ばれる代数概念です．あとでもう少し詳しく述べますが，可換なフロベニウス代数は**種数0の位相的弦理論**の一部と考えることができます．

与えられたスーパーポテンシャルに摂動を加えて，その摂動によって物理系がどのように振る舞うかを考察し，理論に本当の真空が存在することを証明し，摂動の空間上に定まる相関函数を計算する，ということが，$N=2$ ランダウ–ギンツブルグ理論を解析する上で重要となります．これはあとで数学的側面から述べることにしましょう．

4. 特異点

さて，数学側から1変数多項式環 $\mathbb{C}[x]$ と多項式 $f(x)=x^{n+1}$ の組の性質を考えることにしましょう．いろいろな観点があり得ますが，ここでは**特異点**の立場からその性質を説明します．

特異点とは，「周りの構造と比較したときに，際立って性質が異なっている，とくに優れた性質をもつ点」のことを指します．より具体的には，ある図形の部分図形が点に潰れることにより，その部分図形が持っていた情報が凝縮し，多くの対称性や大局的構造の情報を持っているような，特別な点のことです．

1変数多項式環 $\mathbb{C}[x]$ と多項式 $f(x)=x^{n+1}$ の組について考えてみると，一般の $n+1$ 次の多項式には多重度もこめて $n+1$ 個の根がありますが，

*6） 数学ではヤコビ環と呼びます．

*7） **環付き空間**という，点よりむしろその上の函数の環に注目するという考え方の一例です．

$f(x)$ の根は 0 のみです．すなわち $n+1$ 個の根が 0 に潰れたものとみなすことができます．すなわち $x=0$ が特異点です．

どのような図形が潰れ，どのような対称性の情報があるのかを調べるために，特異点を**変形**しましょう．ここで言う変形とは，ある条件を保ったまま*8)，連続的に図形を変化させ，最終的には特異点がなくなるまで動かすということです．x を適当に平行移動することですべての根の和を 0 にすることができるので，$f(x)$ の変形は

$$f_\alpha(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-\alpha_i),\quad \sum_{i=0}^{n}\alpha_i=0$$

と書けることになります．

ある 2 つの根が一致する（つまりある i と j に対して $\alpha_i-\alpha_j=0$ となる）ことと，$f_\alpha=df_\alpha/dx=0$ を満たす点があることが同値になっていますね？これらの点が $f_\alpha=0$ の特異点です．言い換えると，すべての根 α_i たちが互いに異なるとき，$f_\alpha=0$ は特異点をもちません．いくつかの根 α_i が一致したとき，それらが特異点となります．

ここで，$\alpha_i-\alpha_j$ という「根の差」は，幾何学的には 0 次元球面という図形を表現しています．この図形が 1 点に潰れることで特異点がでます．つまり，0 次元球面があったという情報が変化して，特異性となって現れることになったとみなせるのです．より一般の $k+1$ 変数の多項式から出発して考えると，同様に k 次元球面が潰れて特異性が出現することがわかります*9)．

5. 特異点の半普遍変形

a_k を α_i たちの k 次の基本対称式とするとき，

$$\begin{aligned}f_a(x)&:=x^{n+1}+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0\\&=\prod_{i=0}^{n}(x-\alpha_i)\end{aligned}$$

と書き直すことができます．一方で，カイラル環 $Jac(f)=\mathbb{C}[x]/(x^n)$ の線型空間としての基底として，$\{1,x,\cdots,x^{n-1}\}$ を取ることができます．ちょうど $Jac(f)$ の線型空間としての基底 x^k たちの線型結合を，$f(x)$ に付け加えたことで，多項式 $f(x)$ をうまく変形できています．

これは単なる偶然ではなく，超曲面特異点に対して $Jac(f)$ の基底にパラメーターをかけて線型結合をとったものを元の式 f に付け加えることで，特異点の**半普遍変形**と呼ばれる特異点のよい変形が得られます．また，基本対称式を経由した α_i とパラメーター a_k の対応も**ワイル群の不変式論**として一般化され，興味深い数学が展開されます．

6. フロベニウス多様体（種数 0 の位相的弦理論）

特異点の半普遍変形 $f_a(x)$ が与えられると，f を $f_a(x)$ に置き換えることで，パラメーター a_k に依存するフロベニウス代数 $Jac(f_a)$ の族ができます．とくに対応 $\partial/\partial a_k\mapsto\partial f_a/\partial a_k$ によって，同型

$$\bigoplus_{k=0}^{n-1}\mathbb{C}[[a_0,\cdots,a_k]]\frac{\partial}{\partial a_k}\simeq Jac(f_a)$$

があります*10)．

この同型により，フロベニウス代数の単位元に対応する特別なベクトル場 $\partial/\partial a_0$ があることがわかります．それは物理的には，特別な「本当の真空」に対応する物理場の存在を意味しています．

ここで物理的な背景から次の数学的予想が期待されます：

予想 1　• $Jac(f_a)$ 上に留数で与えられた非退化双線型形式がパラメーターに依存しない定数になるような，$\oplus_{k=0}^{n-1}\mathbb{C}[[a_0,\cdots,a_k]]\partial/\partial a_k$ の $\mathbb{C}[[a_0,\cdots,a_k]]$-基底 $(\partial/\partial t_0,\cdots,\partial/\partial t_{n-1})$ が存在する．すなわち，パラメーター a_k たちの空間に平坦な座標系 $(t_0,\cdots,t_{n-1})$ が取れる．

---

*8) 今の場合には変数の数を 1 変数に保ったまま動かします．

*9) $k=1$ として $x^2+y^2=r$ という図形を考えると，$r\to 0$ の極限で 1 次元球面（円周）が潰れることが見えるでしょう．

*10) ここで $\mathbb{C}[[a_0,\cdots,a_k]]$ はパラメーター a_k に関する形式べき級数のなす環で，同型は $\mathbb{C}[[a_0,\cdots,a_k]]$ 自由加群としての同型です．

- ある $(t_0, \cdots, t_{n-1})$ の函数 $F_0(t)$ が存在して，$Jac(f_a)$ の積構造は $F_0(t)$ の t による 3 階微分を用いて記述できる．

上の 2 つを満たすパラメーター空間と函数 $F_0(t)$ などの組のことを**フロベニウス多様体**と呼びます．詳しく述べることはできませんが，$F_0(t)$ は $N=2$ ランダウ–ギンツブルグ理論が定める**種数 0 の位相的弦理論**の分配函数と呼ばれる物理量です．種数 0 という意味は，対応する位相的弦理論が閉弦に基づいたものであり，閉弦が記述する世界面が種数 0 のリーマン面であるということです．

「異なる二種類の幾何学が常に対となって存在する」ということを主張する**ミラー対称性**は，物理だけでなく，数学の様々な分野を関連付け，そこで全く予想もしなかった定理を次々に与えます．それは，最も数学と超弦理論の関連性が強いところで，すでに 20 年以上研究されています．フロベニウス多様体をミラー対称性を用いて比較することで数学的に非常に興味深い結果が導かれますが，このことに関してはすでに多くの解説記事があるのでここでは省略します．

7. 原始形式

$N=2$ ランダウ–ギンツブルグ理論は 80 年代後半から熱心に研究されたのですが，数学側では，同じ研究対象が全く異なる動機からすでに 80 年ごろには現れていました．齋藤恭司氏による**原始形式**による周期写像の理論です．齋藤氏の目標は楕円積分論の一般化・高次元化でした．彼は楕円曲線の族を拡張して超曲面特異点とその半普遍変形を考察し，第一種微分の自然な拡張として原始形式を定義しました．そして，斉次超曲面特異点の場合に原始形式の存在を示し*11)，フロベニウス多様体を構成しました*12)．現在では，この特異点に対するフロベニウス多様体の構成法は，次の節で説明する「D-ブレーンの圏」のアイデアに基づく圏論的手法に拡張されつつあります．

8. D-ブレーン

これまでのところ，行列因子化は登場していません．$N=2$ ランダウ–ギンツブルグ理論や特異点の数学と関連付けるためには，**D-ブレーン**という概念を導入することになります．

種数 0 の位相的弦理論，などと書いたように，ここまでは閉じた弦を想定して話を進めてきましたが，今後は開いた弦（端を持つ弦）も考える必要があります．古典的な運動方程式は，波動方程式で記述されますが，開いた弦の場合には両端で境界条件を課す必要があります．とくに境界条件には 2 種類，自由端に対応するノイマン境界条件と固定端に対応するディリクレ境界条件があります．通常は，両端がともにノイマン境界条件を満たすものを考えて，運動を量子化します．

ディリクレ境界条件を持つ弦は一見無意味に見えます．なぜなら弦の端が時空の特定の場所に固定されて運動がないように思えるからです．しかし立場を変えて弦が固定されている「膜」から見るとそうでないことがわかります．というのも，その「膜」には無数の開いた弦がくっつくことにより「膜」は運動することができ，閉じた弦を生成・消滅できるからです．実際，Polchinski によって，この「膜」は超弦理論のソリトンになっていることがわかりました．D(irichlet) 境界条件によって定まる膜（membrane）なので，省略して D-ブレーンと呼ばれています．

弦理論の摂動論的領域と非摂動論的領域を入れ替える**弦双対性**の理論において，D-ブレーンは欠かすことのできない存在です．弦双対性は　基本的弦 (fundamental string) とソリトン (D-ブレーン）の役割を入れ替えるからです．つまり，摂動論的領域では基本的弦が一方の摂動領域では D-ブレーンの運動が理論を決定すると考えられます．

数学でも同じようなことがあります．例えば，

*11)　一般的な場合は齋藤盛彦氏によって証明されました．
*12)　もともとは平坦構造と呼ばれていました．ここでは現在標準的な呼び方であるフロベニウス構造という言葉を用いています．フロベニウス構造の概念は 90 年代前半に Dubrovin 氏により導入されました．

代数多様体 X の連接層の有界導来圏 $D^b(\mathrm{coh}X)$ は，いわば代数幾何学におけるソリトンの集まりに構造を付加したものです．そこでは，Bondal 氏–Orlov 氏らによって，$D^b(\mathrm{coh}X)$ によって X が再構成されるといった，ソリトンによる基本的弦の記述，と表現できる現象が発見されています．

9. 行列因子化と D-ブレーン

さていよいよ行列因子化です．ここまで読んだ読者の方はすでに想像ができていることとは思いますが，行列因子化は $N=2$ ランダウ–ギンツブルグ理論に対する D-ブレーンとして登場します．

D-ブレーンを数学的に取り扱うには，深谷賢治氏による **A_∞-圏**の概念を用いると見通しが良くなります．A_∞-圏 $\mathcal{A}$ とは次の 3 つ組です：

- **対象**と呼ばれる集合 $Ob(\mathcal{A})$,
- 任意の 2 つの対象 M, N に対して，ベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N)$,
- 多重線型写像 $m_k : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M_1,M_2)\otimes\cdots\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M_k,M_{k+1}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M_1,M_{k+1})$, $M_i\in Ob(\mathcal{A})$, $k\geq 0$, であって
$$\sum \pm m_p(1^{\otimes q}\otimes m_r\otimes 1^{\otimes s})=0$$
が成り立つもの*13)．

この定義はD-ブレーンの観点からも非常に自然な概念です．まず $Ob(\mathcal{A})$ はD-ブレーンの集まりと思えます．また，射 $a\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M_1,M_2)$ というのは，2 枚のブレーン M_1, M_2 に端を持ち交叉対称性を満たす開いた弦（の場）a になります．

これ以上定義は与えませんが，$\mathcal{A}$ からねじれ複体 (twisted complex) の全体を取ることによって得られる三角圏 $D^b(\mathcal{A})$ は，A_∞-圏 $\mathcal{A}$ の有界導来圏と呼ばれる非常に重要な圏で，$\mathcal{A}$ に対する「真の」D-ブレーンの圏と考えられます．とくに，先に挙げた代数多様体の連接層の有界導来圏 $D^b(\mathrm{coh}X)$ も，ある A_∞-圏の有界導来圏となっています．

さて，$N=2$ ランダウ–ギンツブルグ理論は環 R とその元 f を与えることで決まりました．そのD-ブレーンの圏 $D^b(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ としてまさに組 (R,f) を取ることで得られます．つまり，A_∞-圏の対象はただ 1 つの対象 $\cdot$ からなり，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\cdot,\cdot):=R$ で，多重線型写像 m_k は $m_k=0, (k\neq 0,2)$ および $m_0:=f$ かつ m_2 は環 R の積構造から定まるもの，とします．すると，ねじれ複体として行列因子化が登場します．

行列因子化のメリットは，ある導来圏の対象（超弦理論のソリトン）という非常に難しいものを，具体的に書き下すことができ，それらの間の射（D-ブレーンの間に飛ぶ開弦）を計算できるということです．その結果，導来圏の構造それ自体をも決定するだけの力を持っているということです．

より具体的なことを書くと，$\mathcal{A}:=(\mathbb{C}[x],x^{n+1})$ に対して，行列因子化（＝ねじれ複体）のなす三角圏は次の対象（D-ブレーン）
$$\begin{pmatrix}0 & x^{n+1-i}\\ x^i & 0\end{pmatrix},\quad i=1,\cdots,n$$
で生成されることがわかります．さらに，もう少し精密に議論すると，これらの行列因子化と 4 節で与えた 0 次元球面がミラー対称性で移りあう様子も厳密に理解できます．

10. おわりに

行列因子化は**コーエン–マコーレー加群**を理解するために Eisenbud 氏によって導入された概念です．これは**マッカイ対応**等の研究に用いられましたが，20 年ほど忘れられていました．ランダウ–ギンツブルグ理論に対する D-ブレーンとしての解釈により眠りから覚め，現在ではミラー対称性のアイデアとともに活発に研究が行われています．

また，Khovanov 氏による**絡み目のホモロジー** (Link homology) の研究でも行列因子化が用いられており，多方面への応用も期待されます．

（たかはし・あつし，大阪大学大学院理学研究科）

*13) この式の詳細は省略します．弦理論で最も重要な対称性である交叉対称性の要請に対応しています．

ホモロジー的ミラー対称性



植 田　一 石

1. 経路積分と分配関数

アルキメデスの時代から，物理学と幾何学は互いに分かち難く結びついてきた．ニュートン力学はユークリッド幾何に対応し，電磁気学（あるいは特殊相対論）はローレンツ幾何（それに加えて主ファイバー束あるいは接続の幾何），解析力学はシンプレクティック幾何，そして一般相対論はリーマン幾何といった具合である．このリストで点粒子の量子論に対応するのはさしずめヒルベルト空間の幾何といったところであろうが，それでは場の量子論に対応する幾何は何かという問いはまだ人知を超えているように見える．ヒルベルト空間が無限次元のユークリッド空間であることを考えると，これは無限次元の曲がった空間になるのであろうか．

もう少しだけ詳しく説明しよう．質点系（あるいは有限自由度）の古典力学を拡張するには2つの方向がある：一つは場の古典論であり，ここでは配位空間が場の配位全体のなす無限次元の空間になることを除けば，理論の枠組みは有限自由度の場合と変わらない．もう一つは質点系の量子論であり，この場合は座標や運動量，エネルギーといった物理量がヒルベルト空間上の自己共役作用素に格上げされ，系の状態はこのヒルベルト空間上の単位ベクトルで表される．系を観測したときに得られる測定値は確定せず，ある測定値が得られる確率はその測定値に対応する固有ベクトルと系の状態との内積の絶対値の2乗に比例する．この2つの拡張を同時に行ったものが場の量子論であり，特に量子電磁気学は繰り込みの成功とあいまって極めて精度の高い予言能力を持つ自然科学の理論としての地位を確立している．

しかし，場の量子論の数学的な基礎は未だ確立されているとは言い難く，壮麗なゴシック建築の如き古典論に比べると巧みな計算技術とその解釈の集まりにも見える．このことは，最も高貴な力である重力が強固に量子化を拒んでいることに如実に現れているが，これは場の量子論を基礎から支えるべき数学（それはもしかすると無限次元の解析学や幾何学であろうか）がまだ未発達であるからなのかも知れない．あたかも，摩擦の効果に騙されず力が速度ではなく加速度に比例していると正しく認識しながらも，微分積分学を持っていなかったばかりに運動の法則を定式化できなかったガリレイのように．

来るべき無限次元の微積分の理論としてもっとも有力なのは経路積分であろう．これは量子論に対する新たなアプローチとして，ファインマンによって彼の学位論文で提唱され，場の量子論の発展にも大きく貢献した．その基本的な考え方は単純である：粒子の取り得る経路が複数あるとき，古典論においては最小作用の原理によってもっとも作用の少ない経路が選択されるが，量子論においては，作用が最小でない経路も遷移振幅に自明でない寄与をする．ある経路 ϕ の寄与は，その作

用 $S[\phi]$ に虚数単位を掛けて指数関数の肩に乗せたものとして与えられ，重ね合わせの原理によって，全体の振幅はこれらの寄与を可能な経路すべてに渡って足し上げたものになる：

$$Z=\sum_{\phi} e^{iS[\phi]/\hbar}. \qquad (1)$$

配位空間が有限次元であっても，その中の経路全体の集合は無限次元の空間をなすので，この足し上げは無限次元空間における積分になる．場の量子論においては配位空間自体が無限次元になるので，その中の経路の集合はさらに「大きな」空間になる．（量子力学と場の量子論におけるこの違いは，常微分方程式と偏微分方程式の違いに似ている．）

量子論を経路積分で定式化することの利点の一つは統計力学との関係が見やすくなることである：系の熱的振舞いは分配関数

$$Z=\sum_{n}\langle n|e^{-\beta H}|n\rangle$$

で決定されるが，実はこれは (1) において時間を純虚数にして，積分範囲として周期 β の周期的境界条件を満たす経路の空間を取ったものに一致する．ここで，$|n\rangle$ は系の状態の完全系であり，β は温度の逆数，H はハミルトニアンである．

2. 超対称性と BPS 状態

経路積分は一般に無限次元空間上の積分であるが，超対称性が関わる状況でこれが有限次元の積分に落ちることがある．超対称性はボソンとフェルミオンを入れ替える対称性であるが，十分大きな超対称性を持つ系においては，作用にいわゆる「位相的捻り」を入れることによって BPS 状態と呼ばれる特別な状態のみが分配関数に寄与するようにできるのである．これがいわゆる位相的場の理論で，フェルミオンの数を数える演算子 F を導入して分配関数を

$$Z=\sum_{n}\langle n|(-1)^F e^{-\beta H}|n\rangle$$

と変形することによって，非 BPS 状態ではボソンとフェルミオンが必ず対で現れ，しかもそれらの分配関数への寄与がちょうど逆の符号を持って打ち消しあう*1)．

BPS 状態というのは適当な意味で超対称性を保つ状態のことで，1 階の微分方程式で特徴付けられ，ここから自動的に 2 階の微分方程式である運動方程式を満たすことが従う．典型的な例としては正則写像や半自己双対接続，複素部分多様体，それに特殊ラグランジュ部分多様体などが挙げられるが，これらについて以下でもう少し詳しく見てみよう．

リーマン多様体の間の写像 $\phi: M \to N$ に対し，そのエネルギーは

$$E(\phi)=\int_M \|d\phi\|^2 d\,\mathrm{vol}_M$$

で定義される．これが極値をとるような ϕ を調和写像と呼び，2 階の微分方程式

$$\Delta\phi=0$$

で特徴付けられる．ただし，Δ は M と N のリーマン計量から決まる非線形のラプラス作用素である．ここでさらに M と N がケーラー多様体のとき，

$$d\phi\circ J_M=J_N\circ d\phi$$

なる 1 階の微分方程式を満たす ϕ を正則写像と呼ぶ．ただし，J_M と J_N はそれぞれ M と N の複素構造である．正則写像は調和写像であり，しかもそのエネルギーは N のケーラー形式を ω とするとき

$$E(\phi)=\int_M \phi^*\omega^{\wedge \dim_{\mathbb{C}} M}$$

で与えられる．ここで ω が閉形式なので，上式の右辺はホモロジー類 $\phi_*[M]\in H_2(N,\mathbb{Z})$ にしか依らないことに注意．一般に，十分大きな超対称性を持つ系においてはエネルギーは位相的に決まる下限を持ち，場が適当な 1 階の微分方程式を満たすこととこの下限を取ることが同値で，このとき

*1）ここでさらに $e^{-\beta}$ を T とおいたものが例えば文献 2) の定義 5.45 に現れる和に相当する．

自動的に2階の運動方程式を満たす．

次に M を4次元のリーマン多様体とし，その上のヤン・ミルズ理論を考える．ゲージ場 A のエネルギーは曲率 $F_A = d_A A$ を用いて

$$E(A) = \int_M \|F_A\|^2 \operatorname{vol}_M$$

と表され，その停留値であるヤン・ミルズ接続の満たすべき2階の微分方程式

$$d_A * F_A = 0$$

は半自己双対接続の満たす1階の微分方程式

$$*F_A = -F_A$$

からビアンキの恒等式

$$d_A F_A = 0$$

によって自動的に従うのであった．さらに，半自己双対接続のエネルギーは

$$E(A) = -\int_M F_A \wedge F_A$$

となり，特性類で決まる位相的な量になる．

次に M をケーラー多様体としよう．M の部分多様体 N が複素部分多様体であることは，N の接空間 TN が M の複素構造 J の作用で保たれること

$$J \cdot TN = TN$$

で特徴付けられ，体積をエネルギー汎関数に取ったときのBPS状態になる．複素部分多様体の体積は正則写像の場合と同様にケーラー形式で決まり，自動的に極小部分多様体になる．

ここでさらに M の第1チャーン類が零であり，しかもケーラー計量がアインシュタイン方程式を満たすとしよう．このような M はカラビ–ヤウ多様体と呼ばれる．このとき複素部分多様体に加えてシンプレクティック幾何的なBPS状態のクラスもあり，特殊ラグランジュ部分多様体と呼ばれている．M の部分多様体 L が特殊ラグランジュ多様体であることはケーラー形式 ω と正則体積形式 Ω の虚部の L への制限が消えること

$$\omega|_L = \Im\Omega|_L = 0$$

で特徴付けられ，このとき L の体積は Ω の実部の制限の積分で与えられる．

3. 弦理論

弦理論は点粒子の代わりに1次元の対象の運動を考えることによって場の量子論を書き換えようという試みである．場の量子論を導入するには，点粒子の量子論で現れる波動関数を古典場だと思って，それをもう一度量子化する（いわゆる第2量子化）のが普通だが，ファインマン図形に関する足し上げによって与えられる摂動論的な側面に限れば，始状態の点粒子が相互作用を繰り返して終状態の点粒子になるすべての経路に関して振幅の和を取ることと理解することもできる．点粒子の量子力学と場の量子論の違いは粒子の種類と個数が保存されるかどうかにあり，粒子ごとに波動関数が用意されている点粒子の量子力学では例えば電子と陽電子が対消滅をして光子になる過程を記述することはできない．また，たとえ始状態と終状態で粒子数が保存されているような過程を考える場合でも，一般には粒子数が保存されていないような中間状態からの寄与がある．

弦理論は素朴には上の描像で点粒子を1次元の弦に置き換えることによって得られ，これによってファインマン図形はグラフから滑らかな曲面に置き換えられる．この曲面にはリーマン計量を与えるが，実は作用が計量の共形変換で不変なので，経路積分の計量に関する部分は計量の共形類の空間，すなわちリーマン面のモジュライ空間上の積分に落ちることになる．点粒子のときには相互作用はファインマン図形の頂点で起こるが，リーマン面にはグラフの頂点に対応するような特別な点は存在しないので，弦理論の短距離（これは高いエネルギーに相当する）における振舞いは点粒子の場合と大きく異なることが予想される．これはリーマン面のモジュライ空間上の積分の測度がリーマン面のモジュライ空間のコンパクト化にまで伸びることに現れ，このことから弦理論は紫外発散を持たないことが分かる．理論は高エネルギーで本

質的に有限なのである．

ファインマン図形を「膨らませて」2 次元の多様体にするという素朴な描像からも分かるように，弦理論の現在の定式化は本質的に摂動論的であり，このことが理論の非摂動論的な側面の解析を著しく困難にしている．そもそも摂動展開は漸近展開に過ぎず，素朴に足し上げると発散する上に，漸近展開では見えない項が存在するので，これをもって理論の定義とみなすことはできない．弦理論を第一原理から出発して定式化し，その摂動展開としてリーマン面のモジュライ空間上の積分を得よというのは弦理論の最も基本的な問題の一つであろう．

特別な真空の周りでの弦理論の非摂動的な定式化の候補としては AdS/CFT 対応がある．そのスローガンは $U(N)$ ゲージ理論の巨大 N 極限は弦理論であるというものであり，4 次元の超対称ヤン–ミルズ理論と $AdS_5 \times S^5$ と呼ばれる 10 次元の空間の上の超弦理論が双対（すなわち，単一の理論の異なる側面）だというマルダセナ予想に始まる．ここで 5 次元球面 S^5 をより一般の佐々木–アインシュタイン多様体に拡張したものは以下で述べるミラー対称性と関係が深い．

4. ミラー対称性

ミラー対称性は超弦理論の第 2 革命期以前に提唱された双対性で，任意のカラビ–ヤウ多様体 M に対してあるカラビ–ヤウ多様体 W が存在して，M 上の IIA 型超弦理論と W 上の IIB 型超弦理論が同値であることを主張している．これらの超弦理論に位相的捻りを加えることで位相的弦理論と呼ばれる理論ができ，リーマン面のモジュライ空間の上のコホモロジーの理論として定式化することができる（位相的捻りを加える前には単に積分の理論だったものがコホモロジーのレベルにまで落ちている．一般に，位相的場の理論は超対称性を持つ場の理論の骨格を取り出している感じになっており，例えば超対称ヤン–ミルズ理論に対応する位相的場の理論はドナルドソン理論になっている．超対称な場の量子論と位相的場の理論の間のこの関係は，ラプラス作用素の固有関数や固有値の研究と，零固有空間（すなわちコホモロジー）の研究の間の関係に譬えることができよう）．

ミラー対称性を位相的弦理論のレベルに落としたもの（をさらに種数 0 すなわち摂動展開の初項に限定したもの）は数学的には M のグロモフ–ウィッテン不変量と呼ばれるシンプレクティック幾何的な不変量と W の周期積分という複素幾何的な（あるいはホッジ理論的な）不変量の間の驚異的な関係として定式化することができ，1991 年のキャンデラスらによる有名な仕事以降膨大な研究が行われた結果，多くの重要な進歩が得られたが，「ミラー対称性とは何で，そもそも何故そのようなものが存在するのか」という核心的な問いは未だ謎のまま残っている．

ホモロジー的ミラー対称性はこのミラー対称性の概念的な理解を目指し，コンツェビッチによって 1994 年の国際数学者会議で提唱されたもので，M の深谷圏の導来圏と W の連接層の導来圏が A_∞ 圏としてホモトピー同値であることを主張する：

$$D^b \mathfrak{Fuk}\, M \cong D^b \operatorname{coh} W. \tag{2}$$

次節以降ではこの式がいったい何を意味しているのかを解説したい．

5. BPS D ブレーン

超弦理論の第 2 革命の過程で，超弦理論には弦だけでなく，点粒子や膜などといった様々な次元の広がりを持った対象が存在することが明らかになった．その代表が 1995 年にポルチンスキーによって発表された D ブレーンである．D ブレーンという名前の由来は固定端の境界条件を表すディリクレの D と膜を表す英語の membrane にあり，これがあると開弦の端はここに束縛される．D ブレーンのうちで，BPS 状態であり，ホモロジー的ミラー対称性に関わるのがカラビ–ヤウ多様体上の連接層と特殊ラグランジュ部分多様体である．M と W がミラーである（つまり，M 上の IIA 型

超弦理論と W 上の IIB 型超弦理論が同値である）なら，M 上の D ブレーンと W 上の D ブレーンの間にも関係があるはずであり，(2) はこの関係を正確に定式化したものと考えることができる．

A_∞ 圏は圏の概念の一般化であり，通常の圏とは違って 2 つの射の合成が結合律を満たさない代わりに，射の微分や 3 つ以上の射の高次の合成が定義されていて，ある複雑な整合性条件を満たすものを指す．これは D ブレーン付きの超弦理論から位相的捻りによって得られるブレーン付きの位相的弦理論の，摂動展開に関して最低次の部分（種数零の位相的開弦理論，つまり大雑把に言うと正則円盤のモジュライ空間のコホモロジーの理論）が持つ構造を公理化したものと理解することができる．A_∞ 圏については本特集中の梶浦氏の記事でより詳しく解説されると思われるので，さらに知りたい方はそちらを参照されたい．

連接層は複素多様体上の正則ベクトル束と複素部分多様体の両方を含む概念（大雑把に言うと，特異点を持つかもしれない複素部分多様体上の特異点を持つかもしれない正則ベクトル束のようなもの）であり，複素幾何や代数幾何の研究に欠かせない．実 4 次元のケーラー多様体上の正則ベクトル束は小林–ヒッチン対応（ドナルドソンの定理）によって反自己双対接続と 1 対 1 に対応しており，W の実 4 次元複素部分多様体の上の反自己双対接続は (2) の右辺に現れる典型的な BPS D ブレーンの一つになっている．

導来圏は 1950 年代のホモロジー代数の発展の一つの到達点として，グロタンディークと彼の学生のヴェルディエによって 1960 年ごろ導入された概念であるが，これが D ブレーンを取り扱う際にも有効であるというのが第 2 革命期に認識された．導来される前の圏と導来圏の違いは，後者にはシフトと写像錐と呼ばれる操作が存在することである．導来圏というのは大まかに言うと導来される前の圏の対象の複体（つまり，対象をいくつか並べて，その間の射で適当な条件を満たすものを付け加えたもの）のなす圏であるが，シフトというのは複体の次数を 1 つずらすこと，写像錐というのは与えられた 2 つの複体とその間の射をまとめて 1 つの大きな複体と思うことを指す．単なる圏ではなく導来圏を考えるというのはこれらの操作で閉じた体系を考えるということであり，数学でこれを考えるのは，自然数の代わりに四則演算で閉じた有理数を考えるように自然なことなのであるが，ブレーンの文脈においても，シフトはブレーンを反ブレーンに取り替えること，写像錐を取ることはブレーン 2 枚を相互作用させて束縛状態を作ることだと解釈されるので，同じように自然である．また，連接層の導来圏の特徴の一つとして，いろいろな次元の複素部分多様体を混ぜる変換が自然に取り扱えることがあるが，弦理論の双対性で様々な次元のブレーンが自然に混ざり合うことから，これは弦理論で導来圏を考えるもう一つの動機になっている．

一方，(2) の左辺に現れる BPS D ブレーンは特殊ラグランジュ部分多様体であり，これらは集まって深谷圏と呼ばれる A_∞ 圏をなす．深谷圏は厳密かつ一般的な定義を与えるのが大変なことで有名なのだが，大雑把にはフレアコホモロジーが射になっており，射の合成はラグランジュ部分多様体に境界を持つような正則円盤を数え上げることによって定義される*2)．M の特殊ラグランジュ部分多様体のなす深谷圏に対してその導来圏を考えたものが (2) の左辺であり，これが右辺と適当な意味で同値であるというのがコンツェビッチの予想である．ここで注目すべきは，この予想が第 2 革命期の前に提出され，その後ブレーンによる解釈が与えられたことである：弦理論と数学の関わりでは，弦の理論家が驚異的な予言をして，それを数学者が必死に検証するという図式がしばしば強調されるが，ホモロジー的ミラー対称性はそれとは逆の図式の例になっている．

---

*2) 詳しくは文献 2) の定義 6.214 などを見よ…と言いたい所だが，この本は厚い上に内容が豊富で，前から順番に読めばいつまでたってもここまで辿り着かないと思われるので，一言だけここでコメントすると，正則円盤の数え上げというのは分配関数の計算に対応しており，正則というのは BPS 状態であるということ，円盤を考えるというのは摂動論の最低次を見ることに対応している．

6. A_∞ 圏の幾何学

幾何学は空間の性質のうち，与えられた変換で不変なものを研究する学問であり，例えば位相幾何では同相写像で不変な性質を，リーマン幾何では等長写像で不変な性質を，複素幾何では双正則写像で不変な性質を調べるといった具合である．幾何学の目標の一つは同型でない空間を区別するための不変量をつくることであり，例えば位相幾何ではホモロジー，リーマン幾何では曲率，複素幾何では周期などが代表的な例になる．

ホモロジー的ミラー対称性は M のシンプレクティック幾何と W の複素幾何の間に不思議な関係があることを主張しているのだが，これは新しい幾何学の存在を主張していると解釈することもできる．すなわち，A_∞ 圏の性質のうちホモトピー同値で不変なものだけが幾何学的な実体であり，その A_∞ 圏が M の深谷圏の導来圏として実現されているのか，それとも W の連接層の導来圏として実現されているのかは，例えば位相幾何において球面が3次元空間で長さ1のベクトルのなす部分集合として実現されているのか，それとも平面に無限遠点を1つ付け加えて構成されているのかを問うのと同様に意味がないと考えるのである．

それでは，この見方で幾何学的に意味のある対象とは何であろうか．これを言い換えると，A_∞ 圏のホモトピー同値に関する不変量を作れという問題になる．この問いに対するコンツェビッチの答の一つが非可換ホッジ理論である．通常のホッジ理論では，ケーラー多様体に対しホッジコホモロジーからドラムコホモロジーへのスペクトル系列が退化して，それによってドラムコホモロジー上にホッジ構造が定まるが，A_∞ 圏が与えられたとき，ホッジコホモロジーの代わりにホッホシルトコホモロジー，ドラムコホモロジーの代わりに巡回コホモロジーを考えると，ホッホシルトコホモロジーから巡回コホモロジーへのスペクトル系列が退化するとき，巡回コホモロジーの上にコホモロジー的場の理論と呼ばれる構造が入るというのがコンツェビッチのプログラムである．ホッジ理論は周期積分の理論であり，常に代数幾何の中心の一つであったことを考えると，非可換ホッジ理論は来るべき A_∞ 圏の幾何学の一つの中心を形づくると思われる．

また，A_∞ 圏がDブレーン付きの位相的弦理論を摂動論の最低次で見たものに対応しているので，A_∞ 圏の幾何学とは，位相的な弦が摂動論の最低次で世界をどのように見ているかを研究する学問であると言うこともできよう．

7. まとめ

場の量子論，特に重力の量子論を記述する幾何学はまだ知られていないが，空間に対してコホモロジー理論があるように，超対称な場の理論に対してはその骨格となる位相的場の理論が定まる．BPS状態は古典場の運動方程式の解の特別なクラスであり，その力学は位相的場の理論で統制されている．位相的場の理論では経路積分が適当な非線形偏微分方程式の解のモジュライ空間上のコホモロジー類の積分に落ち，しばしば数学的に厳密に定式化することができる．ホモロジー的ミラー対称性はBPS Dブレーン付きの超弦理論のミラー対称性を位相的弦理論のレベルまで落としたものを摂動論の最低次で見たものであり，A_∞ 圏を空間と思ってその幾何を研究せよという新しい視点を提供する．この先にはS双対性やAdS/CFT対応などのより驚異的な双対性があるが，これらの背後にあるのはどのような美しい幾何学なのであろうか．

参考文献

今回紹介した話題に関わる一般的な参考文献としては

1) 別冊・数理科学「スーパーストリング」「現代物理と現代幾何」「双対性の世界」，サイエンス社．

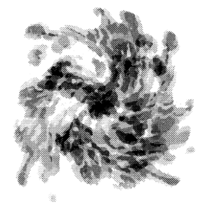
より専門的に学ぶための文献としては

2) 深谷賢治,『シンプレクティック幾何学』，岩波講座 現代数学の展開，岩波書店．

や深谷賢治氏のページ（http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~fukaya/）からダウンロードできる解説文や論文などがある．

（うえだ・かずし，大阪大学大学院理学研究科）

リンクホモロジー入門



田中　利史

1. 序

昨年5月に京都大学理学研究科および数理解析研究所で2週間にわたり行われた中島啓先生を世話人とする国際研究集会 “Link homology and categorification”（リンクホモロジーとカテゴリー化）が行われた．全世界より非常に多くの著名な講演者および参加者が集まり最新の研究に関する情報の交換が行われた．参加者の一人として感じたことはリンクホモロジーの分野が非常に広範囲の分野と関連していることであり，この分野の重要性が大いに認識されつつあることを示しているように思われた．著者にとって，この分野のすべてを紹介することは不可能であるが，この分野をその出発点であるトポロジー（位相数学）の一分野として考え，以下，紹介していきたいと思う．

2. リンクホモロジーとは？

数学における定理や方法は「発明」されるのか，それとも，既に存在していてそれを数学者（ここでは数学の研究をしているすべての人を指すとする）が「発見」するのか，読者はどう思われるであろうか．もし，それらが非常に巧妙で「美しい」理論を与えるなら，それは発見されたと言われるかもしれない．リンクホモロジーは前世紀末に，当時カリフォルニア大学デービス校にいた数学者M. ホバノフ（M. Khovanov）により，まさに「発見」されたのである．（著者は昨年8月にフロリダで行われた研究会で，彼の講演会に出席したことがあるが，彼はまだ30代前半の若い数学者である．）

さて，このリンクホモロジーとはどのようなものであろうか？（次節に詳しく紹介するが）「リンク」とは日本語では**絡み目**と呼ばれる，空間の中の絡んだいくつかの「ひも」である．（ただし，ひもはそれぞれ輪ゴムのように端がないとする．）そのような絡み目に対して定義される，ある種の（量子不変量と呼ばれる）多項式をオイラー標数としてもつ，（コ）ホモロジーが絡み目のリンクホモロジーと呼ばれるものである．大事なことは，これらが絡み目の**不変量**となっていることである．一般に重要な数量というのは計算が困難な場合が多いが，このリンクホモロジーは組合せ的に与えられる場合が多く，計算する際や性質を調べる場合に都合がよい．さらに面白いことに他のいくつかの重要な絡み目の数量との関連が指摘されつつある．しかし，研究は始められたばかりであり，現在でも数多くの基本的な問題（謎）が残されている．

3. リンク（絡み目）の研究

前節でも説明したように，絡み目とは空間の中の図1のようないくつかの閉じたひもの集まりのことである．（特に一つのひもの場合は「結び目」と呼ばれる．）絡み目を研究する分野では，**結び目理論**が用いられる．この研究では「2つの絡み目

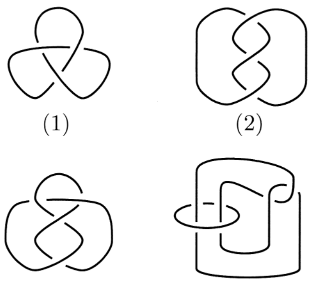


図 1

が同じ「形」かどうかを判定する」ことが重要となる．

例えば図 1 の (1) と (2) は空間の中で動かすと同じ形になることが確かめられる．（これは数学（トポロジー）的なモデルとして定式化されるが，ここでは詳しく述べないことにする．）すなわち，それらは同じ「形」であると言える．ところが，もし 2 つの絡み目が同じ形でないとしたらどうであろうか．いくら動かしてもそれらの「違い」を証明することはできない．（時間がいくらあっても同じ形にならないから，ということでは理由にならない．）実際，図 1 の (1) と (3) は同じ形ではないことが示される．その際に用いられる道具（数量）が絡み目の不変量である．トポロジーの分野では結び目理論を用いると絡み目やそれらの不変量を非常に自然な形で表現することができる．結び目理論の起源はよく知られていないが，18 世紀のイギリスの数学者 P.G. テイト（P.G. Tait）による研究が残されている．その後，ポアンカレ予想として有名な，同じ時代の数学者 H. ポアンカレ（H. Poincaré）により創始されたトポロジーの研究にとりあげられ，その一分野として絡み目の研究はなされていたが，1980 年代の爆発的な発展（これについては次節に説明する）により，世界的に最も研究がなされている分野の一つに数えられるようになっている．

4. 絡み目の不変量とは？

さて，絡み目を研究する際に不変量という数量が用いられるのであるが，そもそも不変量とは何であろうか？

2 つの絡み目を考える場合，それらの「違い」を示すには次のように考えるとよい．絡み目 a に対して，ただ一つの数量 $f(a)$ を対応させる．（つまり f は写像と考える．）もし，2 つの絡み目 a, a' が同じ形であればそれらの絡み目が同じ量を与える（すなわち $f(a) = f(a')$）としたら，逆にその量の「違い」を示すことで，もとの 2 つの絡み目が異なる「形」であることを示すことができる，このような考え方から与えられる写像 f が不変量である．

ニュージーランド出身の数学者 V. ジョーンズ（V. Jones）は作用素環論，トポロジーおよび数理物理への貢献により 1990 年に京都で開かれた国際数学者会議（ICM）においてフィールズ賞を受賞した．ジョーンズは作用素環論の研究より絡み目の多項式不変量を定義している．これは現在**ジョーンズ多項式**と呼ばれている非常に重要な不変量である．ジョーンズ多項式 J は次の 2 つの関係式により与えられる．（その単純さは驚くべきである！）

1. $J(\underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{S}) = (-t^{1/2} - t^{-1/2})^{s-1};$

2. $(t^{1/2} - t^{-1/2})J(L_0) = t^{-1}J(L_+) - tJ(L_-).$

ここで，2 番目の関係式は**スケイン関係式**と呼ばれている．L_-, L_0, L_+ は図 2 で示している絡み目である．各絡み目のひもには向き（進行方向と考えるとよい）が付けられており，示している部分以外では形が全く同じ絡み目とする．ジョーンズ多項式の発見により，絡み目の研究は一変した．これが前節で述べた爆発的な発展の始まりである．

ここで，図 1 の (1), (3) のジョーンズ多項式を与えておく．

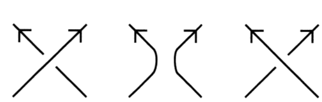


図 2

$$J((1)) = t + t^3 - t^4,$$
$$J((3)) = t^{-2} - t^{-1} + 1 - t + t^2.$$

これらは明らかに「異なる」多項式である．したがって (1) と (3) は異なる絡み目ということが「証明」される．

5. 量子不変量の発見

ここで多少専門的な内容に触れることにする．ジョーンズによるジョーンズ多項式の発見と V. ドリンフェルド（V. Drinfeld），M. ジンボ（M. Jinbo）による量子群により量子トポロジーの爆発的な発展が始まる．その際に新しく発見された不変量は**量子不変量**と名づけられるが，ジョーンズ多項式をはじめ，それらの多くは多項式の形をしている．1980 年代後半より 1990 年代前半にかけて複素単純リー環から，数多くの不変量が定義された．

絡み目 L に対して，各ひもに複素単純リー環 g の既約表現を対応させると，大抵の場合ローラン多項式環 $\mathbf{Z}[q, q^{-1}]$ に値をもつ不変量 $I(L, g)$ が与えられる．ただし，このような方法ですべての不変量が得られるわけではなく，現在，一般化された研究が進められている．絡み目の各成分に n 次元表現を対応させると量子 $sl(n)$ 不変量（**HOMFLY-PT 多項式**）が得られる．これは次式で与えられる．

$$\lambda P(L_-) - \lambda^{-1} P(L_+) = (q - q^{-1}) P(L_0).$$

$\lambda = q^n$ とおくことにより得られる不変量を $P_n(L)$ とおく．$P_2(L)$ はジョーンズ多項式である．（2 つの式を見比べてみるとよい．）一方で，$P_0(L)$ はアレキサンダー多項式と呼ばれている不変量に等しい．（アレキサンダーは 1928 年の論文でこの不変量を定義しているが，ジョーンズ多項式が発見されるまで，この不変量よりも優れた不変量は発見されていない．）また．$P_1(L)$ は不変量として役に立たないものである．（興味を持たれた読者は調べられると良い．）これらの多項式 $P_n(L)$ に対して，ここ十数年の間に奇跡的にリンクホモロジー理論が与えられたのである．

6. リンクホモロジーの誕生

前に述べたようにホバノフにより 1990 年代後半にリンクホモロジー（理論）が発見された．それは絡み目 L に対して 2 重次数つき（コ）ホモロジー

$$H(L) = \oplus_{i,j} H^{i,j}(L)$$

と表され，そのオイラー標数はジョーンズ多項式と一致する．

$$P_2(L) = \sum_{i,j} (-1)^i q^j rk(H^{i,j}(L)).$$

ここで，q は不定元である．また rk はホモロジーのランク（階数）を意味する．この $H(L)$ は**ホバノフホモロジー**と呼ばれている．詳しい定義は次節以降に行うとして，ここでは，定理として挙げておくことにする．

定理． 空間内の絡み目の組合せ的に定義される 2 重次数つきホモロジー（不変量）H が存在し，$H^{i,j}$ は有限生成で，オイラー標数はジョーンズ多項式となる．

7. ホバノフの (1 + 1) 位相的量子場理論

ここで，前節で述べたホバノフホモロジーの詳しい定義について紹介するための準備を行う．

図 3 で示されているように（抽象的に）曲面 S^1_2, S^2_1, S^1_0, S^0_1, S^2_2, S^1_1 を定義する．

各 S^b_a は a 個の円周から b 個の円周への**コボルディズム**を定義する．ここで，コボルディズムとは曲面のことである．どのようなコボルディズ

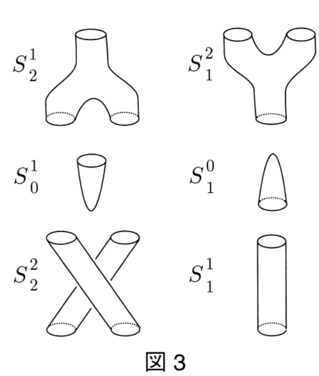


図 3

ムも図 3 の曲面を組み合わせることにより得られる．下に a 個の円周があり，上に b 個の円周がある場合，ここでは，下から上に向かって時間が流れていると考えると分かりやすい．時間が進むにつれて円周たちが動いた「跡」がコボルディズムである．（ただし途中で 2 つの円周が合体または分裂する場合があることに注意する．）$\mathcal{M}$ を円周を対象とし，（S_2^1, S_1^2, S_0^1, S_1^0, S_2^2, S_1^1 で生成される）コボルディズムを射とするような**カテゴリー**（**圏**）とする．また $\mathcal{M}$ の対象は非負整数 $\mathrm{Ob}(\mathcal{M})=\{\bar{n}|n\in\mathbf{Z}_+\}$ で数え上げるとする．

$\mathbf{Z}$-mod$_0$ を次数つき $\mathbf{Z}$ 加群のカテゴリーとする．また，A を階数 2 の自由 $\mathbf{Z}$ 加群とし，$\mathbf{1}$ と $\mathbf{X}$ により生成されているとする．さらに，それらはそれぞれ次数 $1, -1$ を持つとする．（テンソル積に関しては線形に拡張する．）対象 $\bar{n}$ に $\mathbf{Z}$ 加群 $A^{\otimes n}$ を対応させ，曲面 $S_2^1, S_1^2, S_0^1, S_1^0, S_2^2, S_1^1$ に射 $m, \Delta, \iota, \epsilon$, Perm, Id を対応させる**関手** $F : \mathcal{M} \to \mathbf{Z}$-mod$_0$ を次の式で与える．

$$F(S_2^1) = m : A\otimes A \to A(m(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}) = \mathbf{1}, \quad m(\mathbf{1}\otimes\mathbf{X}) = m(\mathbf{X}\otimes\mathbf{1}) = \mathbf{X}, m(\mathbf{X}\otimes\mathbf{X}) = 0),$$

$$F(S_1^2) = \Delta : A \to A\otimes A(\Delta(\mathbf{1}) = \mathbf{1}\otimes\mathbf{X} + \mathbf{X}\otimes\mathbf{1}, \Delta(\mathbf{X}) = \mathbf{X}\otimes\mathbf{X}),$$

$$F(S_0^1) = \iota : \mathbf{Z} \to A(\iota(1) = \mathbf{1}),$$

$$F(S_1^0) = \epsilon : A \to \mathbf{Z}(\epsilon(\mathbf{1}) = 0, \epsilon(\mathbf{X}) = 1),$$

$$F(S_2^2) = \mathrm{Perm},$$

$$F(S_1^1) = \mathrm{Id}.$$

ここで Perm: $A\otimes A \to A\otimes A$ は置換写像であり，$\mathrm{Perm}(u\otimes v) = v\otimes u$ で与えられる．また，Id は恒等写像 $\mathrm{Id}{:}A \to A$ である．

この関手 F がホバノフの $(1+1)$ 位相的場の理論（TQFT）と呼ばれるものである．

8. ホバノフホモロジー

ここで，前節で定義した関手 F を用いてホバノフが与えたコホモロジーの定義を紹介する．

L を空間内の向きのついた絡み目とし，D は交点に 1 から n までの番号のついた L の図式とする．（図式とは絡み目の平面への射影図のことである．通常，有限個の 2 重点のみをもつ射影図を考える．）また $\mathcal{I}$ を D の 2 重点（交点）の集合とする．D の 2 重点が与えられたとき次の 2 通りの解消を考える（図 4）．図の左の解消のやり方を **0 解消**と呼び，右の解消のやり方を **1 解消**と呼ぶことにする．また D の**解消**とは D のすべての 2 重点について 0 解消または 1 解消を行い得られた図式とする．（つまりいくつかの円周の非交和である．）すると D は 2^n 個の解消を持つことがすぐに分かる．ここで $\mathcal{L}$ を $\mathcal{I}$ の任意の部分集合とする．（空集合であってもよい．）$\mathcal{L}$ に対して解消 $D(\mathcal{L})$ を次の操作で対応させる．

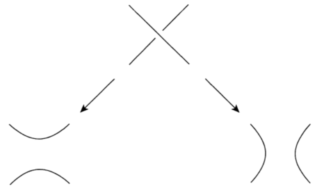


図 4

「$\mathcal{L}$ に属する 2 重点に対しては 1 解消を行いそれ以外の 2 重点では 0 解消を行う．」

ここでようやく前節で与えた関手 F を用いる．$D(\mathcal{L})$ を円周の集まりと考え，関手 F を適用すると次数つき $\mathbf{Z}$ 加群 $A^{\otimes k}$ が得られる．ここで k は $D(\mathcal{L})$ の円周の個数である．このとき

$$V_D(\mathcal{L}) = F(D(\mathcal{L}))\{-|\mathcal{L}|\}$$

とおく．（$|\mathcal{L}|$ は L の濃度であり，$\{n\}$ は $\mathbf{Z}$ 加群の自己同型写像であり $n\in\mathbf{Z}$ だけ次数を下げる写像であるがここでは気にしないことにする．）$D(\mathcal{L})$ と $D(\mathcal{L}a)$ は D2 重点 a の近くのみで異なる図式である．図式が含まれている平面 $\mathbf{R}^2$ と区間 $[0,1]$ との直積を考える．$D(\mathcal{L})$ と $D(\mathcal{L}a)$ をそれぞれ $\mathbf{R}^2\times\{0\}$ と $\mathbf{R}^2\times\{1\}$ の 1 次元部分集合（多様体）と考え，$D(\mathcal{L})$ から $D(\mathcal{L}a)$ へのコボルディズム S を図 5 のように構成する．（ここで，（右側にある）円筒は一般にはたくさん存在する．）

ここで

$$F(S) : F(D(\mathcal{L})) \to F(D(\mathcal{L}a))$$

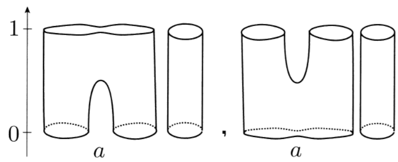


図 5

により写像

$$\xi_a^{V_D}(\mathcal{L}) : V_D(\mathcal{L}) \to V_D(\mathcal{L}a)$$

を与える．また，$\mathcal{L} = \{v_{k_1}, \cdots, v_{k_l}\}$ とおくとき，

$$E_D(\mathcal{L}) = \mathbf{Z}v_{k_1} \wedge \cdots \wedge v_{k_l}$$

と定義し，複体を次のように定義する．

$$\overline{CKh}^i(D) = \oplus_{\mathcal{L}\subset\mathcal{I},|\mathcal{L}|=i} V_D(\mathcal{L}) \otimes E_D(\mathcal{L}).$$

$x(D)$（または $y(D)$）を D の負の交点数（または正の交点数）とする（下図を参照）．



$$CKh^i(D) = \overline{CKh}^i(D)[x(D)]\{2x(D) - y(D)\}$$

とおく．（ここで $[n]$ は $N[n]^i = N^{i+n}$ で定義される自己同型写像である．やはりこれについても気にしないとする．）このとき，境界作用素 $d^i : CKh^i(D) \to CKh^{i+1}(D)$ が次で与えられる．

$$d^i(x) = \sum_{a\in\mathcal{I}\setminus\mathcal{L}} (\xi_a^V \otimes \xi_a^E)(\mathcal{L})(x).$$

（$\xi_a^E : E(\mathcal{L}) \to E(\mathcal{L}a)$ は $\xi_a^E(v_{k_1}, \cdots, v_{k_l}) = v_{k_1} \wedge \cdots \wedge v_{k_l} \wedge a$ で与えられる写像である．）$Kh^i(D)$ を $\{CKh^i(D), d^i\}$ の i 番コホモロジー群として定義する．

次の定理がホバノフの論文の主定理である．

定理． D を向き付けられた絡み目 L の図式とする．このとき各 $i \in \mathbf{Z}$ に対し，次数つき $\mathbf{Z}$ 加群 $Kh^i(D)$（の同型類）は L の不変量である．

9. 今後の発展と応用

これまで，ジョーンズ多項式に対してホモロジー理論が存在することを述べてきた．そのような対応は，結び目不変量の**カテゴリー化**と呼ばれている．つまりジョーンズ多項式のカテゴリー化がホバノフホモロジーと言える．このようなカテゴリー化は他に存在するのであろうか？

現在までに知られている例をいくつか挙げてみよう．アレキサンダー多項式 $P_0(L)$ については今世紀の初めにP. オズバット（P. Ozsváth）とZ. サボー（Z. Szabó）とJ. ラスムセン（J. Rasmussen）により発見された2重次数つき**結び目ホモロジー**のオイラー標数となっていることが知られている．すなわちアレキサンダー多項式のカテゴリー化がこの結び目ホモロジーと言える．また，同じ時期にホバノフとL. ロザンスキー（L. Rozansky）はマトリックス・ファクトリゼーション（Matrix factorization）を用いて多項式 $P_n(L)(n \geq 1)$ のカテゴリー化を発見し，その後，彼らはHOMFLY-PT多項式自身のカテゴリー化の構成にも成功している．これについて説明することは専門的に成り過ぎるため割愛することにするが，現在ではこのHOMFLY-PT多項式のカテゴリー化に対しての，様々な研究が活発に成されつつあるようである．また，（絡み目の拡張である）空間グラフの不変量に対しても，そのカテゴリー化に対する研究は発展しつつあるようだ．果して，すべての複素単純リー環とその既約表現に対応する多項式不変量のカテゴリー化は存在するのか？ これは未解決の難問である．

ここではホバノフとロザンスキーの結果を定理の形で述べておく．

定理． 空間内の絡み目の組合せ的に定義される3重次数つきホモロジー（不変量）$H = \oplus_{i,j,k} H^i_{j,k}$ が存在し，各 $H^i_{j,k}$ は有限生成で，オイラー標数はHOMFLY-PT多項式となる．

ここで，結び目の研究への応用例を一つ挙げておこう．E.S. リー（E.S. Lee）によるホバノフホモロジーの変形の研究とラスムセンの研究により絡み目の研究における重要な予想の組合せ的証明が与えられた．これについて説明しよう．

T を空間の中にあるトーラス（円環）としよう．

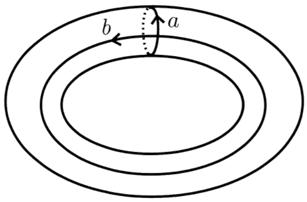


図6

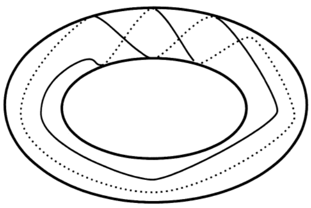


図7

（ドーナツの表面の図形である．）その上に，自分自身と交わらないが，最後には出発点に戻ってくる曲線を自由に書いてみよう．これは**トーラス結び目**と呼ばれる結び目である．この結び目は図6の a 方向または b 方向にそれぞれ p または q 回，回っているとき (p, q) トーラス結び目と呼ぶことにする．（便宜上，反対方向へ回るときは負の回数を加えるとする．）図1(1)の結び目は図7のような $(3, 2)$ トーラス結び目である．

ここで結び目に対して，図8のような操作を考えよう．結び目を1回だけ自分自身にぶつけて上下を入れ替えてみよう．

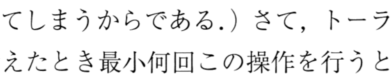


図8

このような操作は**結び目解消操作**と呼ばれている．（なぜなら何回かこの操作を行うとすべての結び目は解けてしまうからである．）さて，トーラス結び目を考えたとき最小何回この操作を行うと解けるであろうか？（そのような最小数を**結び目解消数**と呼ぶことにする．）J. ミルナー（J. Milnor）は次のような予想を与えた．

予想． (p, q) トーラス結び目の結び目解消数は $(p-1)(q-1)/2$ である．

これはミルナー予想と呼ばれる大変難しい問題である．1990年代前半に，P. クロンハイマー（P. Kronheimer）とT. ムロウカ（T. Mrowka）はドナルドソン理論を用いてこの予想を解決した．（S.K. ドナルドソン（S.K. Donaldson）は独自の解析的手法（ゲージ理論）を用いた4次元多様体の研究に対して1986年にフィールズ賞を受賞している．）一方，ラスムセンは今世紀はじめにリーのホバノフホモロジーの研究を通して整数値不変量を定義し，この問題を組合せ的に（再）証明したのである．

10. 結び

もちろんここで述べたことはリンクホモロジーに関する研究のほんの一部に過ぎない．研究は始められたばかりであるが，現在，すでにリンクホモロジーに関連した40部以上の論文が出版され，50部以上のプレプリントがネットワーク上にあふれている．そのような現状をみると，今後，絡み目の研究者はもちろん，トポロジーの若い研究者はもはや避けては通れない分野になるであろう．リンクホモロジーの発見は，絡み目の研究に2度目のビッグバンをもたらしたといえるかもしれない．

参考文献

1) M. Khovanov, A categorification of the Jones polynomial. *Duke Math. J.* **101** (2000), no.3, 359–426.
2) M. Khovanov, Link homology and categorification. International Congress of Mathematicians. Vol.II, 989–999, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.
3) M. Khovanov, L. Rozansky, Matrix factorizations and link homology, math.QA/0401268.
4) M. Khovanov, L. Rozansky, Matrix factorizations and link homology II, math.QA/0505056.
5) J.A. Rasmussen, Khovanov homology and the slice genus Authors: math.GT/0402131.
6) J.A. Rasmussen, Khovanov-Rozansky homology of two-bridge knots and links, math.GT/0508510.
7) E.S. Lee, An endomorphism of the Khovanov invariant. *Adv. Math.* **197** (2005), no.2, 554–586.

（たなか・としふみ，大阪市立大学大学院理学研究科）

名著に親しむ

——特集から広がる読書案内——

森山　翔文

『ミラー対称性』

今回の特集のテーマである「トポロジカルな弦の世界」における金字塔の一つはもちろんミラー対称性であるが，筆者も大学院生時代にそれを勉強しようとして何度も断念したことがある．今から思えばそれは至極当然で，必要となる予備知識が膨大であったせいであろう．超対称量子力学，線形シグマ模型，トポロジカルツイストなどの一つ一つの概念が，出現した当時，世の中を騒がせた大理論であり，それらをすべて咀嚼して初めて，甘美なるミラー対称性の世界に導かれる．

その状況はここ五年で一転した．ミラー対称性の巨匠たちによる超大作『Mirror Symmetry』[1)]が出現したからだ．上に挙げた一つ一つの概念がこの本において体系的にまとめられ，それほど苦労せずに一通り概観できるようになった．したがって，この本をさしおいて，今回の本コーナーは成り立たないだろう．

この本が登場する以前は，ミラー対称性を勉強するためには，原著論文を一つ一つ参照しなければならなかった．それぞれの論文において，その時代の問題意識に共感し，論文著者の新発見を追体験し，そして論文著者の抱えたさらなる問題意識をもとに考察するという一連の作業を繰り返す必要があった．このような勉強方法自体は研究を志す学生にとって重要なステップであるが，初めからすべてをこなすことは至難な業であり，ミラー対称性の発展を一通り概観する前に，時間的な制限や精神力的な限界から志半ばにして諦めざるを得ない状況もあっただろう．

そういう意味で，この本の特徴はやはり難解なるミラー対称性を概観できるところにあるだろう．この本は，数学に関する予備知識，物理に関する予備知識，物理の議論によるミラー対称性の証明，数学的な証明，そして，発展的な内容という五部構成からなる．特に，第二部から第三部への展開は流暢で，細かいところを気にしなければ，実にワクワクしながら読み通せる．

それにしてもこの本のページ数には驚かされる．900ページにも及ぶこの超大作を読破することが果たして可能なのか，と思わず本の前で立ちすくんでしまう．

使い古された譬えではあるが，初めて象が日本に運ばれたときを想像してみよう．象がどんなものかを一目見ようと集まった人ごみの中で，大きなお腹を触った人にとって象は平べったい壁みたいなものだし，太い足を触った人にとって象は太い柱みたいなものだっただろう．だけど，どこを触ってもそれは本物の象（の一部）には間違いはない．

本物に触れて，自分の感性にしたがって理解すれば，それだけでも十分に価値がある．長い道のりでたとえミラー対称性までたどり着かなくても，途中には多くの宝石が散りばめられている．超対称量子力学とモース理論の関係は，一連の物理学と幾何学の壮大なる統合の第一歩で，実に感動的だ．また，ミラー対称性の簡単な例として，トーラス上のシグマ模型を考えるところも実に明晰に説明されており，この時点で既にミラー対称性の奥深さを味わえる．さらに，非線形シグマ模型の解析がより簡単にゲージ化された線形シグマ模型に帰着できるところも驚きだ．より基本的なテーマとして，この本の経路積分，繰り込みや繰り込み群の解説は簡潔にして要を得ている．そのため，常に様々な発散量の処理に悩まされる場の理論の初学者が，この本の題材である低次元場の理論で，場の理論に対する理解を深めることも十分に深い意義を持つだろう．

重要なことは，それが象の一部であることを忘れないことではないだろうか．いつか読み返して本当の意味で象の全貌がクリアに目に映ったら，そこから新しい一歩を踏み出せるかもしれない．

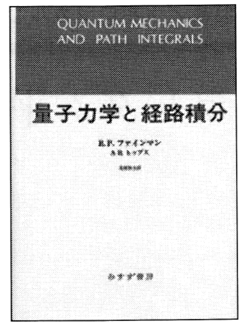
今回の特集のテーマと直結するミラー対称性の本の他に，この読書案内では数理科学全般を勉強する上で，筆者がこれまで出会った名著をいくつかご紹介したい．初めの二つは歴史的名著と呼ぶのにふさわしい，大理論の提唱者による講義録で，新しい概念がいかに生まれたかを追体験できるもので，次の二つは現代的な弦理論を勉強する際に役立つ教科書である．

参考文献

1) K. Hori, S. Katz, A. Klemm, R. Pandharipande, R. Thomas, C. Vafa, R. Vakil, E. Zaslow, *Mirror Symmetry*, Clay Mathematics Institute.

（もりやま・さねふみ，名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

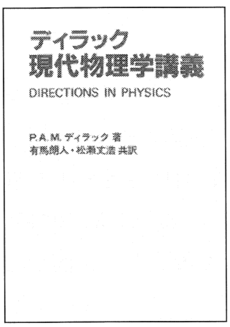
量子力学と経路積分



R.P. ファインマン，A.R. ヒッブス，北原和夫訳，みすず書房，1995 年.（原著：R.P. Feynman and A.R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals, McGraw-Hill.）

経路積分による量子力学の定式化を，経路積分の提唱者であるファインマン氏が自ら解説した名著．標準的な教科書で一通り量子力学を勉強した後の副読本に最適．提唱者ならではの深い洞察に基づいて，最小作用の原理の自然な拡張として，経路積分という新しい視点から量子力学を捉えていく．また，多くの教育的な演習問題が収録されている．

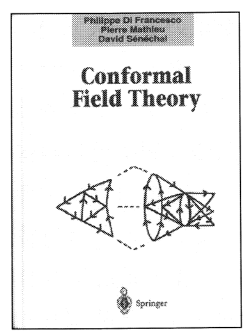
ディラック 現代物理学講義



P.A.M. ディラック，有馬朗人・松瀬丈浩共訳，培風館，1985 年.

ディラック氏が自らの発見である，ディラック方程式，モノポール，巨大数仮説などについて語った晩年の講義集．数々の大理論をコンパクトにまとめた贅沢な一冊．訳者の有馬氏の序文にあるように，「数学的な美」をとことん追求した結果として，数々の物理の大理論に到達したディラック氏の自然観が随所に伺える．また，現在ではよりよい理論に置き換わったものも多々あるが，それらは氏が既成の理論に対する不満や問題意識を率直に述べたこの本の影響を少なからず受けていると筆者は信じている．（なお，最近は岡村氏による別の訳本がちくま学芸文庫から出版されている．）

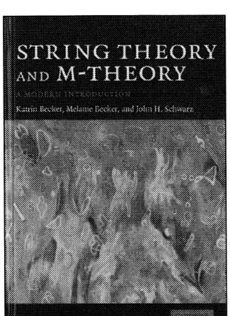
Conformal Field Theory



P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Senechal, Springer, 1996 年.

標準的な共形場理論の教科書．近年の弦理論の発展を勉強する際に，避けて通れないのが共形場理論．4 章，5 章，6 章がこの本の中心だが，1 章にあるフローチャートに従って，興味に応じて自由気ままに読み進められるのも特徴．復習部分も秀逸．特に，「リー代数の対称性を持つ共形場理論」の前のリー代数の復習部分は，要点がまとまっており，これだけでリー代数を一通り勉強できる．

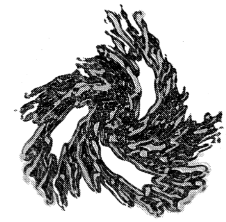
String Theory and M-theory —A Modern Introduction—



K. Becker, M. Becker, J.H. Schwarz, Cambridge Univ. Press, 2007 年.

弦理論の新しい教科書．10 年程前の弦理論における革命期では，典型的な教科書として，Green-Schwarz-Witten や Polchinski が読み親しまれてきたが，それらと相補的に新しい時代の問題意識や発展を取り込んだ教科書．後半の話題がこの本の中心だが，多くの演習問題を通じて現代的な発展を概観できる．

ランダム平面分割の可積分構造



中津　了勇

1. はじめに

弦理論のソリトンである D ブレーンの発見以来，相互作用する開弦と閉弦の系に内在する開–閉弦双対性が重要な役割を果たしている．この双対性は超対称ゲージ理論と超重力の対応を強く示唆している．厳密解に関する新たな視点に立脚した考察を行うことにより，これらの理論に内在する共通の可積分構造とそこから導かれる幾何構造を解明し得る可能性がある．組合せ論的統計模型を用いる 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論のサイバーグ・ウィッテン厳密解の導出や，トポロジカルバーテックスを用いる A 模型トポロジカル閉弦の分配関数の厳密計算など，超対称ゲージ理論とトポロジカル弦理論の近年の進展を統合・拡張していくことは有望である．これらの異なる進展を，3 次元結晶の溶解をモデル化したランダム平面分割[1)]と呼ばれる組合せ論的統計模型を用いて統合し得ることが，明らかになりつつある (図 1)．この組合せ論的統計模型の可積分構造に関する筆者たちの最近の研究[2)]を紹介する．

2. ランダム ヤング図形

整数の非増大列 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots)$；$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$ で，ある番号から先はすべて 0 であるものを分割と呼ぶ．$|\lambda| = \lambda_1+\lambda_2+\cdots$ とすると，分割 λ は自然数 $|\lambda|$ をいくつかの自然数の和に表すやり方である．$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots)$ の中の 0 でない成分の個数を $l(\lambda)$ と書く．分割はヤング図形を用いて視覚化できる．分割 λ に対応させて 1 行目に水平に λ_1 個の箱を，2 行目に水平に λ_2 個の箱を順次左端を合わせて並べたものをヤング図形と言い，図形も同じ λ で表すことにする．ヤング図形の形が λ であるとも言う．構成する箱の個数をヤング図形のサイズと言う．ヤング図形 λ のサイズは $|\lambda|$ に等しい．$l(\lambda)$ はヤング図形の上下の幅である．

サイズ n のヤング図形全体の集合を $\mathcal{Y}_n$ と書く．n 次の対称群 S_n の既約表現は n の分割で分類できる．分割 λ に対応するその既約表現の次元 d_λ を用いる次のような確率測度を $\mathcal{Y}_n$ の上で考える．

$$\frac{d_\lambda^2}{n!} = \frac{n!}{\prod_{s\in\lambda} h(s)^2}, \quad \lambda \in \mathcal{Y}_n. \tag{1}$$

フックの長さによる次元公式を用いた．ヤング図

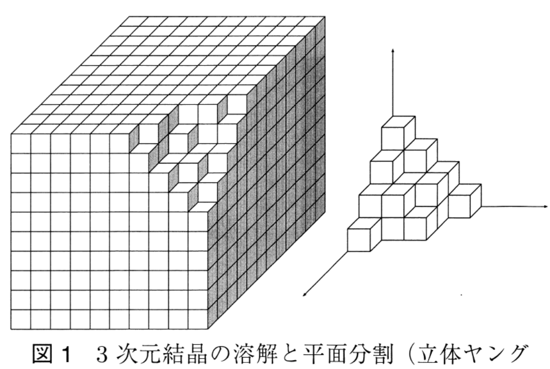


図 1　3 次元結晶の溶解と平面分割（立体ヤング図形）．

形を構成する一つの箱 s に注目し，s から右と下に腕と脚を伸ばせば，s を折れ目とするフックが得られるが，これに含まれる箱の数が $h(s)$ である．

対称群のプランシュレル測度 (1) でのヤング図形の熱力学的振舞いを調べるには，サイズを固定したカノニカル分布より，その制限を外したグランドカノニカル分布のほうが簡明である．ヤング図形全体の集合を $\mathcal{Y}=\cup_n\mathcal{Y}_n$ と書く．t を正の実数として，次の確率測度を $\mathcal{Y}$ に入れる．

$$e^{-t}t^{|\lambda|}\left(\frac{d_\lambda}{|\lambda|!}\right)^2, \quad \lambda\in\mathcal{Y}. \tag{2}$$

これはプランシュレル測度を n についてポアッソン分布させたものである．分配和を次のように書き直すとわかりやすい．

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{Y}}e^{-t}t^{|\lambda|}\left(\frac{d_\lambda}{|\lambda|!}\right)^2=\sum_{n=0}\frac{t^n}{n!}e^{-t}\sum_{\lambda\in\mathcal{Y}_n}\frac{d_\lambda^2}{n!}.$$

右辺の n に関する和は t をパラメータとするポアッソン分布である．ポアッソン分布の平均は t なので，典型的なヤング図形の大きさは t と考えてよい．t を十分大きくとっておけば，確率測度 (2) で定義されるランダム ヤング図形から十分大きいサイズのヤング図形の性質を調べることができる．

3. 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論

$\mathbb{R}^4$ 上の非可換ゲージ理論の非摂動効果の典型はインスタントン効果である．$F_A=dA+A\wedge A$ を場の強さとすると，反自己双対方程式 $*F_A=-F_A$ の解となるゲージ場 A をインスタントンと言う．非線形方程式の解である．インスタントン数と呼ばれるトポロジカル電荷を持っており，インスタントン数 n のゲージ場（n–インスタントン）は，理論に $O(e^{-|n|/g_{eff}^2})$ の寄与をする．この非摂動効果を評価するには，インスタントンの自由度，すなわち，反自己双対方程式の解空間（インスタントンのモジュライ）の積分が必要になる．通常，n–インスタントンを 1–インスタントン n 個からできていると見なす希ガス近似が用いられる．1–インスタントンには $\mathbb{R}^4$ での位置と拡がりの自由度がある．位置の自由度に起因してインスタントンのモジュライは非コンパクトである．さらに，拡がり 0 のデルタ関数的なインスタントンに起因する特異点がある．非コンパクト性は希ガス近似の赤外発散，特異点の存在は紫外発散に関わる．

時空の非可換パラメータを選ぶことにより，非可換時空に住むゲージ理論のインスタントンのモジュライは特異点のない滑らかな空間になる．このモジュライは拡がり 0 のインスタントンの特異点の解消を与えている．非可換時空が希ガス近似の紫外発散を正則化する．時空の非可換パラメータは正則化のパラメータである．しかし，赤外の問題は残る．ネクラソフは非可換時空のインスタントンのモジュライを局所化することにより，$\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論の場合にこの問題を解決した[3)]．赤外の問題を非可換時空による紫外正則化に押し付けることができるのである．$U(1)$ ゲージ理論に対するネクラソフの答えは

$$\int_{\mathcal{M}_n}d\mathrm{vol}=\sum_{\lambda\in\mathcal{Y}_n}\left(\frac{d_\lambda}{|\lambda|!}\right)^2 \tag{3}$$

である．左辺は n–インスタントンのモジュライ $\mathcal{M}_n$ の体積を表している．右辺の和のヤング図形 λ は非可換 $\mathbb{R}^4$ の原点に局在する n–インスタントンを表している．Λ を $U(1)$ 理論の力学的スケールとする．ネクラソフの分配関数は

$$\mathcal{Z}_{U(1)}^{4d}(\Lambda;\hbar)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\Lambda}{\hbar}\right)^{2n}\int_{\mathcal{M}_n}d\mathrm{vol} \tag{4}$$

$$=\sum_{\lambda\in\mathcal{Y}}\left(\frac{\Lambda}{\hbar}\right)^{2|\lambda|}\left(\frac{d_\lambda}{|\lambda|!}\right)^2 \tag{5}$$

である．適当なカラビ–ヤウ多様体による IIA 超弦のコンパクト化で超対称ゲージ理論を実現することを念頭に置いており，$\hbar$ は弦の結合定数 g_{st} と解釈されるものである．

4. ランダム立体ヤング図形

ある方向に非負整数を並べた 1 次元的な配列が分割である．これを 2 次元的な配列にしたものが平面分割である．非負整数の配列

$$\pi = \begin{array}{cccc} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & \cdots \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} & \cdots \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \tag{6}$$

であって，任意に一つの列もしくは段を固定したとき，そこに現れる非負整数の配列が分割となるものを平面分割と呼ぶ．$|\pi| = \sum_{i,j=1} \pi_{ij}$ とすると，平面分割 π は，自然数 $|\pi|$ をいくつかの自然数の2次元的な和に表すやり方である．分割を平面ヤング図形を用いて視覚化できるのと同様，平面分割は立体ヤング図形を用いて視覚化できる．2次元分割 π に対応する立体ヤング図形は配列の π_{ij} の場所に π_{ij} 個の立方体を垂直方向に重ねて置いたものである．図形も同じ π で表す．例えば，図 2 (a) の立体ヤング図形は平面分割

$$\begin{array}{cccc} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & \\ 2 & 1 & 1 & \\ 1 & & & \end{array} \tag{7}$$

を視覚化したものである．構成する立方体の個数を立体ヤング図形のサイズと言う．立体ヤング図形 π のサイズは $|\pi|$ に等しい．

平面分割 π は対角成分ごとにも分割を定めている．m を整数として，$j - i = m$ をみたす π_{ij} の配列を端から並べて定まる分割を $\pi(m) = (\pi(m)_1, \pi(m)_2, \cdots)$ と書く．

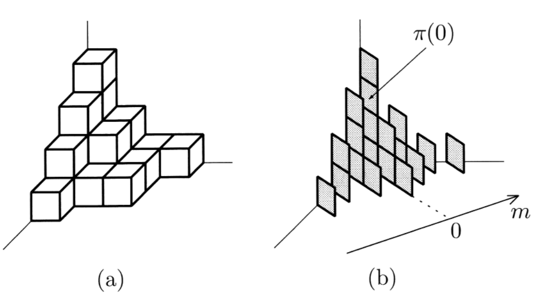


図 2　(a) 立体ヤング図形と (b) ヤング図形の列．

$$\pi = \begin{array}{cccc} \pi(0)_1 & \pi(1)_1 & \pi(2)_1 & \cdots \\ \pi(-1)_1 & \pi(0)_2 & \pi(1)_2 & \cdots \\ \pi(-2)_1 & \pi(-1)_2 & \pi(0)_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \tag{8}$$

という具合である．逆に，分割の列

$$\cdots, \pi(-2), \pi(-1), \pi(0), \pi(1), \pi(2) \cdots$$

から平面分割を得るには，この列の隣り合う2つの分割が連接関係を満たすことが必要である．次のように分割 μ, ν の連接関係 $\mu \succ \nu$ を定めよう．

$$\mu \succ \nu \Longleftrightarrow \mu_1 \geq \nu_1 \geq \mu_2 \geq \nu_2 \geq \mu_3 \geq \cdots.$$

分割の列 $\cdots, \pi(-1), \pi(0), \pi(1), \cdots$ を (8) のように配置したとき，これが平面分割となるには，隣り合う分割 $\pi(m), \pi(m+1)$ が次のように連接関係を満たすことが必要十分である．

$$\begin{aligned} &\cdots \prec \pi(-2) \prec \pi(-1) \prec \pi(0) \\ &\succ \pi(1) \succ \pi(2) \succ \cdots \end{aligned} \tag{9}$$

平面分割 (7) が定める分割の列を視覚したものが図 2 (b) である．連接関係 (9) の部分列 $\pi(0) \succ \pi(1) \succ \cdots$ は形が $\pi(0)$ のヤング盤[*1] T を定めている．実際，$\pi(m) \backslash \pi(m+1)$ にある箱に $m+1$ を書き込んでいけばよい．同様にして，部分列 $\cdots \prec \pi(-1) \prec \pi(0)$ も形が $\pi(0)$ のヤング盤 T' を定める．例えば，平面分割 (7) からは次のようなヤング盤 T, T' が得られる．

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 1 & & \\ \cline{1-2} 1 & & & \\ \cline{1-1} \end{array}, \quad T' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & & \\ \cline{1-2} 1 & & & \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

サイズ n の平面分割全体の集合を $\mathcal{C}_n$ とし，平面分割全体の集合を $\mathcal{C} = \cup_n \mathcal{C}_n$ とする．次のような分配関数（数え上げの母関数）を考える．

$$Z(q, Q) = \sum_{\pi \in \mathcal{C}} q^{|\pi|} Q^{|\pi(0)|}. \tag{10}$$

*1）以下の規則 $i), ii)$ でヤング図形 λ に正の整数を書き込んだものが形が λ のヤング盤である：$i)$ 水平方向に並ぶ数字の列は右向きに weakly increasing である．$ii)$ 垂直方向に並ぶ数字の列は下向きに strictly increasing である．本文では数字の列の増減の向きが規則 $i), ii)$ と逆向きになる．

前段で述べた対応で平面分割 π を形が $\pi(0)$ の 2 つのヤング盤 T, T' の組と考えれば，分配関数 (10) はヤング図形 $\lambda = \pi(0)$ と形 λ の 2 つのヤング盤 T, T' の数え上げに帰着する．

ヤング盤 T が正の整数 i を含むとき x_i を対応させると，次のような単項式 x^T がヤング盤 T から定まる．

$$x^T = \prod_{i=1}^{\infty} x_i^{T \text{ に現れる } i \text{ の回数}}.$$

単項式 x^T を形 λ のヤング盤 T について足し上げたものがシューア関数 $s_\lambda(x_1, x_2, \cdots)$ である．

$$s_\lambda(x_1, x_2, \cdots) = \sum_{T:shape\,\lambda} x^T. \qquad (11)$$

この定義からは非自明であるが，$s_\lambda(x)$ は変数 $x_i (i = 1, 2, \cdots)$ に関する次数 $|\lambda|$ の対称関数である．$m+1$ 番目以降の変数を 0 に置くと，m 変数のシューア多項式 $s_\lambda(x_1, \cdots, x_m)$ が得られる．2 変数のシューア多項式は次のようなものである．

$$s_{(1)}(x_1, x_2) = x_1 + x_2\,,$$
$$s_{(2)}(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2\,,$$
$$s_{(1,1)}(x_1, x_2) = x_1 x_2\,, \qquad \cdots .$$

分配関数 (10) は変数 $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ を $q^\rho = \left(q^{i-\frac{1}{2}}\right)_{i=1}^{\infty}$ に特殊化したシューア関数を用いて表すことができる．実際，

$$q^T = \prod_{m=0}^{\infty} q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)(|\pi(m)|-|\pi(m+1)|)},$$
$$q^{T'} = \prod_{m=0}^{\infty} q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)(|\pi(-m)|-|\pi(-m-1)|)}$$

とすれば，(10) の分配和は

$$Z(q, Q) = \sum_\lambda Q^{|\lambda|} \sum_{T, T':shape\,\lambda} q^T q^{T'} \quad (12)$$

の形に書き直せる．さらに，上式の右辺の和に関して

$$\sum_{T:shape\,\lambda} q^T = \sum_{T':shape\,\lambda} q^{T'} = s_\lambda(q^\rho) \quad (13)$$

に注意すれば，結局

$$Z(q, Q) = \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}} s_\lambda(q^\rho)^2 Q^{|\lambda|} \qquad (14)$$

という表示が得られる．

シューア関数のコーシー恒等式を用いれば，(14) の分割 λ の無限和をマクマホン関数と呼ばれる無限積の形に直すことができる．実際，コーシー恒等式

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{C}} s_\lambda(x) s_\lambda(y) = \prod_{i,j=1} \frac{1}{1 - x_i y_j}$$

の変数を $x = y = Q^{\frac{1}{2}} q^\rho$ に特殊化することにより，次の無限積表示を得る．

$$Z(q, Q) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - Q q^n)^n}.$$

5. 5 次元 $\mathcal{N} = 1$ 超対称ゲージ理論

分配関数 (10) は $\mathbb{R}^4 \times S^1$ 上の 5 次元 $\mathcal{N} = 1$ 超対称ゲージ理論の言葉で読み直すことができる．ゲージ群は $U(1)$ とする．Λ を理論の力学的スケール，R を S^1 の周長とすれば，この 2 つが超対称ゲージ理論のパラメータである．もう一つのパラメータ $\hbar$ も用意する．$\hbar$ は弦の結合定数 g_{st} と解釈されるものである．$R, \Lambda, \hbar$ はすべて正の実数である．パラメータ q, Q をゲージ理論のパラメータで次のように書き換える．

$$q = e^{-R\hbar}, \quad Q = (R\Lambda)^2. \qquad (15)$$

このように $R, \Lambda, \hbar$ の関数と見た分配関数の表式 (14) が 5 次元理論のネクラソフの分配関数である．

$$\mathcal{Z}_{U(1)}^{5d}(R, \Lambda; \hbar) = Z(q = e^{-R\hbar}, Q = (R\Lambda)^2). \qquad (16)$$

R は 5 次元（$R = \infty$）と 4 次元（$R = 0$）を結ぶパラメータである．(15) から，R を q–変形のパラメータと見ることもできる．$R \to 0$ の極限で (16) が (5) に帰着することを確かめておく．実際，フックの長さの積の q–類似によるシューア関数の表示（フックの公式）

$$s_\lambda(q^\rho) = \frac{q^{\frac{|\lambda|}{2}+n_\lambda}}{\prod_{s\in\lambda}(1-q^{h(s)})}$$

を (14) の右辺に代入すると

$$\lim_{R\to 0} Q^{|\lambda|} s_\lambda(q)^2 = \left(\frac{\Lambda}{\hbar}\right)^{2|\lambda|}\left(\frac{d_\lambda}{|\lambda|!}\right)^2$$

がわかる．これは (5) の測度に等しい．

6. ランダム立体ヤング図形と可積分階層

ポテンシャルを用いて次のように変形した模型を考えよう[2)]．

$$Z_p(t\,;q,Q)=\sum_{\lambda\in\mathcal{Y}} s_\lambda(q^\rho)^2 Q^{|\lambda|} e^{\Phi(t,\lambda,p)}, \quad (17)$$

$$\Phi(t,\lambda,p) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \Phi_k(\lambda,p). \quad (18)$$

$t=(t_1,t_2,\cdots)$ は結合定数を表し，ポテンシャルの具体形は

$$\Phi_k(\lambda,p) = \sum_{i=1}^{\infty} q^{k(p+\lambda_i-i+1)} - \sum_{i=1}^{\infty} q^{k(-i+1)} \quad (19)$$

とする．(19) の右辺は無限和の差であるが，2 項の間に相殺があり，次のような有限和の形になる．

$$\Phi_k(\lambda,p) = \sum_{i=1}^{l(\lambda)}\Big(q^{k(p+\lambda_i-i+1)} - q^{k(p-i+1)}\Big) + q^k\frac{1-q^{pk}}{1-q^k}.$$

λ を主対角の分割 $\pi(0)$ と見れば，(17) は外部ポテンシャル中のランダム平面分割の模型を与えている．4 節で述べた対応を用いて，右辺の分割 λ の統計和を平面分割 π の和に書き直せば，(17) は次のようになる．

$$Z_p(t;q,Q)=\sum_{\pi\in\mathcal{C}} q^{|\pi|} Q^{|\pi(0)|} e^{\Phi(t,\pi(0),p)}. \quad (20)$$

このように変形した模型は可積分系の立場から興味深いものになっている．実際，分配関数 (17) は 1 次元戸田鎖の τ 関数を与えている．1 次元戸田鎖は可積分な格子力学で，その力学変数 ϕ_p ($p\in\mathbb{Z}$) は次のような指数型相互作用の運動方程式（戸田方程式）に従う[*2)]．

$$\partial_x^2\phi_p = e^{\phi_{p+1}-\phi_p} - e^{\phi_p-\phi_{p-1}}, \quad p\in\mathbb{Z}. \quad (21)$$

分配関数 (17) から戸田方程式を得るには，時間 x をポテンシャル Φ_1 の結合定数 t_1 と同一視し，力学変数 ϕ_p を

$$e^{\phi_p} = q^{(p+1)^2}\frac{Z_{p+1}(t;q,Q)}{Z_p(t;q,Q)}, \quad p\in\mathbb{Z} \quad (22)$$

とする．このようにして与えた格子変数が戸田方程式を満たすことを示すことができる．運動量やエネルギーに加えて，1 次元戸田鎖には互いに可換となる無限個の保存量が存在し，対応する高次のハミルトニアンによる可換な時間発展を考えることができる．こうして 1 次元戸田鎖に無限個の時間変数 $t=(x,t_2,t_3,\cdots)$ を持ち込んだものが 1 次元戸田階層である．高次のポテンシャルの結合定数 t_k を高次の時間変数と見なすことにより，分配関数 (17) は 1 次元戸田階層の τ 関数を与えることがわかる．

ここで詳細に立ち入る余裕はないが，5 節で述べた 5 次元 $\mathcal{N}=1$ 超対称ゲージ理論との関連を簡単に触れておく．このゲージ理論には S^1 方向のホロノミーに類似するループ演算子 $\mathcal{O}_k(x)$ がある．k はループの S^1 に巻き付く回数である．これは性質の良い非局所演算子で，特に，5 次元 $\mathcal{N}=1$ 超対称ゲージ理論を位相場理論と見るとき，相関関数 $\langle\prod_a\int_{\mathbb{R}^4}\mathcal{O}_{k_a}\rangle$ は位相不変量と成り得る．$U(1)$ 理論の場合，この相関関数の母関数を分配関数 (17) が与えることがわかる．ポテンシャルの結合定数 t_k は $\mathcal{O}_k(x)$ の結合定数に相当する母関数のパラメータである．分配関数 (17) は 1 次元戸田階層の τ 関数であるから，5 次元 $\mathcal{N}=1$ 超対称ゲージ理論の相関関数も 1 次元戸田階層で記述される．

残りの紙数を使って，分配関数 (17) が 1 次元戸田階層の τ 関数であることの証明の雰囲気を説明したい．その前に，ランダム立体ヤング図形の転送行列の方法を紹介しておく．

---

*2） 戸田鎖の時間を変数 x で表している．

7. ランダム立体ヤング図形と自由フェルミオン

ランダム立体ヤング図形の転送行列[4]は，平面分割 π の対角成分ごとに定まる分割 $\pi(m)$ の離散時間 m に関する時間発展を記述する．分割（ヤング図形）と2次元自由フェルミオンの状態の間の有名な対応を用いると，転送行列を2次元共形場の言葉で表示できる．

$$\psi(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\psi_m z^{-m-1},\quad \psi^*(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\psi^*_m z^{-m}$$

$(z\in\mathbb{C})$ を次の反交換関係で定まる2次元複素自由フェルミオン場とする．

$$\{\psi_m,\psi^*_n\}=\delta_{m+n,0},$$
$$\{\psi_m,\psi_n\}=\{\psi^*_m,\psi^*_n\}=0.$$

この系の電荷 p に荷電した基底状態 $|p\rangle$ は次の条件で特徴付けられるディラックの海である．

$$\psi_m|p\rangle=0,\quad \forall m\geq -p,$$
$$\psi^*_m|p\rangle=0,\quad \forall m\geq p+1.$$

フェルミオンのフォック空間 F は基底状態 $|0\rangle$ に ψ_m,ψ^*_n を次々作用させて得られる状態空間である．分割と電荷でラベルされた状態 $|\lambda;p\rangle$ で F を張ることもできる．状態 $|\lambda;p\rangle$ は分割 λ で定まる $|p\rangle$ の次のような励起状態である．

$$|\lambda;p\rangle = \pm\prod_{i=1}^{l(\lambda)}\psi_{i-\lambda_i-1-p}\psi^*_{-i+1+p}\,|p\rangle\,.$$

転送行列はバーテックス演算子を用いて構成できる．実際，$\pi(-\infty)$ から $\pi(0)$ に至る時間発展と $\pi(0)$ から $\pi(\infty)$ に至る時間発展を記述する演算子 $G_\pm$ は次のようなものである．

$$G_\pm = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^{\frac{k}{2}}}{k(1-q^k)}J_{\pm k}\right\}. \qquad (23)$$

右辺の $J_{\pm k}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}:\psi_{\pm k-n}\psi^*_n:$ は次のようなフェルミオンの $U(1)$ カレントのモードである．

$$:\psi(z)\psi^*(z):=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n z^{-n-1}.$$

$G_\pm$ が確かに離散時間発展を記述するのを見るには，これを用いて4節の議論を再現できればよい．電荷 p の基底状態に $G_\pm$ を作用させると

$$\langle p|G_+ = \sum_{\lambda\in\mathcal{Y}}s_\lambda(q^\rho)\langle\lambda;p|, \qquad (24)$$
$$G_-|p\rangle = \sum_{\lambda\in\mathcal{Y}}s_\lambda(q^\rho)|\lambda;p\rangle \qquad (25)$$

となることが確かめられる．右辺の係数は4節のヤング盤 T,T' の数え上げの式(13)に他ならない．

ポテンシャル $\Phi_k(\lambda,p)$ に関しては

$$H_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{kn}:\psi_{-n}\psi_n: \qquad (26)$$

$(k=1,2,\cdots)$ とすれば，$|\lambda;p\rangle$ は固有値 $\Phi_k(\lambda,p)$ を持つ H_k の同時固有状態

$$H_k|\lambda;p\rangle = \Phi_k(\lambda,p)|\lambda;p\rangle \qquad (27)$$

であることが確かめられる．

(24), (25), (27) に注意すると，結局，変形した模型の分配関数のフェルミオン表示

$$Z_p(t;q,Q) = \left\langle p\left|G_+Q^{L_0}\exp\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}t_kH_k\Big\}G_-\right|p\right\rangle \qquad (28)$$

が得られる．ここで，$L_0=\sum_{n=-\infty}^{\infty}n:\psi_{-n}\psi^*_n:$ はビラソロ代数の一つの生成子である．

8. ランダム立体ヤング図形と量子トーラス Lie 代数

複素自由フェルミオンを用いると，2次元戸田階層の τ 関数は次のように表示できる[5]．

$$\tau^{2-Toda}(T,\bar{T};p) = \left\langle p\left|\exp\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}T_kJ_k\Big\}g\exp\Big\{-\sum_{k=1}^{\infty}\bar{T}_kJ_{-k}\Big\}\right|p\right\rangle. \qquad (29)$$

g は $GL(\infty)$ の元であり，$T=(T_1,T_2,\cdots),\bar{T}=(\bar{T}_1,\bar{T}_2,\cdots)$ は戸田階層の2系列の無限個のハミルトニアン $J_{\pm k}(k=1,2,\cdots)$ に対応する時間変

数．この2系列の時間発展を同一視できる場合に，2次元から1次元戸田階層への縮退が起こる．

次のようにして分配関数(17)が1次元戸田階層の τ 関数であることを証明[2)]できる．

1. 分配関数のフェルミオン表示(28)を2次元戸田階層の τ 関数の標準的な表示(29)に変換する．
2. 得られた表示において1次元戸田階層への縮退が実際起こっていることを確かめる．

この証明の不思議は量子トーラスLie代数を導入して上記の手順を実行する所[*3)]にある．量子トーラスLie代数は次のような交換関係を満たす $V_m^{(k)}$ $(k=0,1,\cdots;m\in\mathbb{Z})$ で生成されるLie代数である．

$$\left[V_m^{(k)},V_n^{(l)}\right]=\left(q^{\frac{lm-kn}{2}}-q^{-\frac{lm-kn}{2}}\right)\left(V_{m+n}^{(k+l)}-\delta_{m+n,0}\frac{q^{k+l}}{1-q^{k+l}}\right).$$

これは関係 $UV=qVU$ を満たす U,V が生成する非可換2次元トーラスの導くLie代数，すなわち，2次元可換トーラスのポアッソン代数の q–変形量子化である．このLie代数の次のようなフェルミオン表示を用いる．

$$:\psi\left(q^{\frac{k}{2}}z\right)\psi^*\left(q^{-\frac{k}{2}}z\right):=\sum_{m=-\infty}^{\infty}V_m^{(k)}z^{-m-1}q^{-\frac{k}{2}},$$
$$V_m^{(k)}=q^{-\frac{km}{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{kn}:\psi_{m-n}\psi_n^*:. \qquad (30)$$

既に現れた“ハミルトニアンたち”は，$V_0^{(k)}=H_k$，$V_{\pm k}^{(0)}=J_{\pm k}$ だから，すべてこのLie代数に含まれる．

ランダム立体ヤング図形の転送行列と量子トーラスLie代数は相性が良く，特に，次のような G_-G_+ の随伴作用が導くシフト対称性が重要である．

$$(G_-G_+)\left(V_m^{(k)}-\delta_{m,0}\frac{q^k}{1-q^k}\right)(G_-G_+)^{-1}=(-)^k\left(V_{m+k}^{(k)}-\delta_{m+k,0}\frac{q^k}{1-q^k}\right). \qquad (31)$$

*3) 当事者の一人としては，試行錯誤の末，そうなったとしか言いようがない．

実際，この対称性（の特別な場合）を用いて，フェルミオン表示(28)を次のような形に変換できる．

$$Z_p(t;q,Q)=\left\langle p\left|\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-)^k t_kJ_k\right\}\times\mathbf{g}_\star^{5d\,U(1)}\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-)^k t_kJ_{-k}\right\}\right|p\right\rangle. \qquad (32)$$

(32)の $\mathbf{g}_\star^{5d\,U(1)}$ は次のような $GL(\infty)$ の元である．

$$\mathbf{g}_\star^{5d\,U(1)}=q^{\frac{W}{2}}(G_-G_+)Q^{L_0}(G_-G_+)\,q^{\frac{W}{2}}. \qquad (33)$$

但し，$W=W_0^{(3)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}n^2:\psi_{-n}\psi_n^*:$ は W_∞ 代数の1つの生成子である．

最後に，この表示で1次元戸田階層への縮退が起こっていることを確かめる．実際，$\mathbf{g}_\star^{5d\,U(1)}$ が次の性質を満たすことが示せる．

$$J_k\mathbf{g}_\star^{5d\,U(1)}=\mathbf{g}_\star^{5d\,U(1)}J_{-k},\quad k=1,2,\cdots. \qquad (34)$$

これは2次元戸田階層の2系列のハミルトニアン $J_{\pm k}(k=1,2,\cdots)$ が同一と見なせることを意味し，分配関数(17)が1次元戸田階層の τ 関数であることを示している．

参考文献

1) A. Okounkov, N. Reshetikhin and C. Vafa, “Quantum Calabi-Yau and Classical Crystals,” hep-th/0309208.
2) T. Nakatsu and K. Takasaki, “Melting Crystal, Quantum Torus and Toda Hierarchy,” arXiv:0710.5339[hep-th], to appear in *Commun. Math. Phys.*
3) N.A. Nekrasov, “Seiberg-Witten Prepotential from Instanton Counting,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **7** (2004) 831, hep-th/0206161.
4) A. Okounkov and N. Reshetikhin, “Correlation Function of Schur Process with Application to Local Geometry of a Random 3-Dimensional Young Diagram,” *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003) no.3 581, math.CO/0107056.
5) 高崎金久，『可積分系の世界—戸田格子とその仲間』，共立出版．

（なかつ・としお，大阪大学大学院理学研究科）

位相的弦理論とブラックホール

山口　哲

1. 導入

重力は日常で非常になじみ深い力であるにも関わらず，まだ理解されていないことが多くあります．古典重力理論としての一般相対性理論（アインシュタイン重力）は，非常に成功した理論で，多くの観測結果が一般相対性理論を支持しています．一方，理論的研究において重力場の量子論が関係すると思われる場面では，様々な不思議な問題が持ち上がります．その代表的なものが，ブラックホールの熱力学的性質です．

さて重力の量子論として最も有望な理論は弦理論です．弦理論を使えば，ブラックホールの熱力学的性質のような量子重力理論が関わる問題に対してミクロな理論の立場からアプローチできるのではないかと期待できます．

では本稿のもう一つのキーワードである「位相的弦理論」がブラックホールの物理において果たす役割は何でしょうか．位相的弦理論とは，大ざっぱに言って物理的弦理論（位相的弦理論と区別してアインシュタイン重力を含む弦理論をこう呼ぶことにします）の中でも性質がよく見やすい部分を切り出してきたものです．言い換えれば，物理的弦理論の中の物理量のうち，特に性質のよいものについては，位相的弦理論を使って計算できるということです．

この「位相的弦理論で計算できるもの」が，実はブラックホールの熱力学的性質と深い関わりがある，というのが今回紹介するOSV予想の話です．大栗，ストロミンジャー，ヴァファ[4]は，ロペス・カルドソ，ドゥ・ウィット，モハウプト[1~3]の結果を元にして，次のような予想を立てました．

$$Z_{\rm BH} = |Z_{\rm top}|^2. \tag{1}$$

$Z_{\rm BH}$ はブラックホールの分配関数と呼ばれ，ブラックホールの熱力学と関係がある量です．一方，$Z_{\rm top}$ は位相的弦理論の分配関数と呼ばれる量です．本稿では，これらの詳しい意味を説明していきます．

では，熱力学の説明から始めましょう．

2. エントロピー

温度や熱といった現象を扱う物理の理論を「熱力学」と言います．例えば「温度」は日常的によく使われる言葉ですが，「その正体は何か」と聞かれたらどう答えますか？ 熱力学では，温度は「エネルギー」という比較的なじみ深いものと「エントロピー」という日常生活には全く縁がなさそうなものと次のような関係で結びついています．

ある温度 T の物体に熱を少しだけ加えたとします．そのときのエネルギーの変化 dE とエントロピーの変化 dS と温度 T の間に，

$$dE = TdS \tag{2}$$

という関係があります．これを熱力学の第一法則

と呼びます．

でも，これだけだと分かったような気になりません．エントロピーって何なのでしょうか．熱力学のエントロピーや温度のような「マクロ」な量を，分子や原子の運動という「ミクロ」な立場から説明するのが，マックスウェルやボルツマンといった人たちによって始められた統計力学です．例えば空気を見てみましょう．空気はマクロな立場からするとのっぺりしたもので，温度があります．力を加えて圧縮したりすると温度が上がったりするので，熱力学的なエネルギーもあることが分かります．しかし，ミクロな立場から見ると描像は一変します．空気は膨大な数の分子からできていてそれらは激しく飛び回っています．熱力学的なエネルギーはその分子の運動エネルギーです．

このようなミクロの立場からエントロピーは次のように定義されます．全エネルギー E を固定したとしましょう．この場合でも原子の運動状態としてはいろいろなものが考えられます．例えば一つの分子だけを考えたとしても，飛んでいる方向の分だけ自由度があります．たくさんの分子があればもっとたくさんの可能性があります．このようにエネルギーを固定したときのあり得る状態の数*1) を $\Omega(E)$ と書くことにします．すると，エントロピーは，

$$S(E) = \ln \Omega(E) \tag{3}$$

と定義できます*2)*3)．このようにして定義したエントロピーが実際熱力学的なエントロピーと同じであることが確かめられます．つまり，このエントロピーから $T = 1/(dS/dE)$ で「定義」される「温度」T が，我々がよく知っている温度と同じ性質を満たします．

*1) 古典的には相空間の体積，量子論的には量子状態の数です．

*2) このエントロピーはミクロ正準分布のエントロピーと呼ばれます．OSV 予想の中では，ブラックホール・エントロピーはどんな分布のエントロピーなのか，ということが実は問題になります．

*3) 本稿では簡単のため $\hbar = c = k_B = 1$ とする自然単位系を用いることにします．

3. ブラックホールの熱力学と統計力学

さて，ブラックホールの熱力学の話題に移りましょう．

ブラックホールとは，中心の周りの非常に小さな範囲に大きな質量が集まったものの周りの重力場の解のことです．例えば非常に単純な場合は，球対称で静的で中心に近づくほど重力が大きくなります．ブラックホールを特徴づけるものは「事象の地平線」と呼ばれる面です．この地平線の中に入ると二度と出てこれません．

このブラックホールと熱力学に関して，ベッケンシュタイン[5]（文献 6) も参照）は次のような面白いアナロジーがあることを発見しました．ブラックホールの質量（エネルギー）M と地平線の面積 A と表面重力*4) τ の間に

$$dM = \frac{1}{8\pi G}\tau dA \tag{4}$$

という関係が成り立ちます．ここで G はニュートンの重力定数です．これは，熱力学の第一法則 (2) と同じような形をしています*5)．まず，質量はエネルギーそのものです．アナロジーとしては，数係数をのぞいて表面重力 τ が温度，地平線の面積 A がエントロピーに見えます．これらのアナロジーを表 1 にまとめておきました．

さて，このブラックホールの熱力学の第一法則っぽいものは本当に熱力学なのでしょうか．例えば，ブラックホールの「温度」τ は温度計で測れるようなものなのでしょうか．

これに答えを出したのが，ホーキング[7]です．彼は，ブラックホールが地平線付近から輻射を放つ

表 1 ブラックホールの熱力学．

熱力学的量	ブラックホールに関する量
エネルギー E	質量 M
温度 T	表面重力 τ
エントロピー S	地平線の面積 A

*4) 「表面重力」が何者かというのはここではあまり重要でないので説明を省略します．

*5) ここでは述べませんでしたが，熱力学第 0，第二，第三法則に対応するブラックホールの法則も成り立ちます．

ことを示しました．この輻射の温度がまさに τ に比例しています．正確には，ブラックホール温度 $T_{\rm BH}$ は，

$$T_{\rm BH} = \frac{1}{2\pi}\tau \tag{5}$$

となります．式 (4), (2) と比べると，「ブラックホールのエントロピー」$S_{\rm BH}$ は

$$S_{\rm BH} = \frac{A}{4G} \tag{6}$$

のように書けます．この式は「ベッケンシュタイン–ホーキングのエントロピー公式」と呼ばれています．

さて，ブラックホールの熱力学というべきものが確かに存在していることが分かってきました．では，通常の熱力学がミクロの立場から統計力学で記述できたように，ブラックホールの熱力学も何らかのミクロな記述，言い換えれば「ブラックホールの統計力学」はあるのでしょうか？ 例えば，「ブラックホールの状態数」を数えることで，ブラックホールのエントロピーを式 (3) のような形に書けるのでしょうか？

弦理論が重力のミクロな記述であるので，弦理論を使えばブラックホールのエントロピーをミクロな立場から説明できると期待できます．これに最初に成功したのはストロミンジャー，ヴァファ[8)]でした．彼らはある種のブラックホールについて，ミクロ状態を数え上げ，その数の対数をとる（式 (3)）とまさにベッケンシュタイン–ホーキングの式 (6) と一致することを示しました．

その後この結果はいろんな場合に拡張されました．一般的にはミクロ状態を数えるのは難しいのですが，いろんな工夫がなされています．この方向の研究は今でも続いていて，様々な興味深い結果が出ています．

4. 位相的弦理論と物理的弦理論

ブラックホールと位相的弦理論の関係を述べる準備として，物理的弦理論の中に位相的弦理論がどのように埋め込まれているのかについて説明します．

まず，その前に位相的弦理論について簡単に復習します．詳しいことは他の方の記事の中で説明されていると思うので，そちらを参照して下さい．X を複素 3 次元カラビ–ヤウ多様体とします．カラビ–ヤウ多様体というのは，ある種の良い性質を持った多様体で，大ざっぱに言ってその「形」（複素構造）と「大きさ」（ケーラー構造）とで特徴付けられます．位相的弦理論には 2 種類あって，形のみに注目するものを B 模型，大きさのみに注目するものを A 模型と言います．本稿では A 模型のみを扱います．大きさとは言いましたが，一般には一つの数ではなく複数の数の組です．X にはいくつかの（2 次元の）穴があって，これらの「穴の大きさ」が，ここでいう大きさのパラメーターです．つまり X にある 2 次元の穴の数を $h_{1,1}(X)$ と書くことにすると，大きさのパラメーターは $h_{1,1}(X)$ 個の数の組 t^A，$A = 1, \cdots, h_{1,1}(X)$ で表されます．この大きさのパラメーターは，「ケーラー・パラメーター」と呼ばれます．

位相的弦理論で計算できる量（あるいは計算したい量）は，t^A の関数の列 $F_g(t)$，$g = 0, 1, 2, \cdots$ です．この列を表すのに，形式的パラメーター λ を導入して次のような生成母関数を考えるのが便利です．

$$Z_{\rm top}(t, \lambda) = \exp\left(\sum_{g=0}^{\infty} \lambda^{2g-2} F_g(t)\right). \tag{7}$$

この形式的パラメーターは実は位相的弦理論における「量子効果の大きさ」を表しています．もし λ が非常に小さいなら，$Z_{\rm top} \cong \exp(F_0(t)/\lambda^2)$ で近似できます．この意味で $F_0(t)$ は「古典的な寄与」，$F_1(t), F_2(t), \cdots$ は「量子補正」と呼ぶことができます．λ のべきが高いものほど高次の補正です．

この位相的弦理論は，次のような形で物理的弦理論と関係があります．関係がある物理的弦理論は IIA 型弦理論を $\mathbb{R}^4 \times X$ の上で考えたものです．IIA 型弦理論は 10 次元時空で定義されている弦理論の一つです．これを $\mathbb{R}^4 \times X$ という曲がっ

た10次元時空で考えます．これは「IIA型弦理論の X によるコンパクト化」と呼ばれています．

位相的弦理論はこのIIA型弦理論を X でコンパクト化したときの「低エネルギー有効作用」の中に，次のような項として現れます[9,10]．

$$\int d^4x\ R_+^2 \sum_{g=1}^{\infty} (W_+^2)^{g-1} F_g(t). \tag{8}$$

これから，この意味を説明したいと思います．

弦理論をコンパクト化してできる理論は低エネルギーでは4次元の「場の理論」で表されます．場とは，電磁場や重力場といった類のものです．これらの場のダイナミクスは場の方程式で表されます．例えば電磁場であればマックスウェル方程式，重力場であればアインシュタイン方程式のようなものです．これらの理論を書き下すときに，その場の方程式を書くよりも，「作用」と呼ばれる汎関数を書いたほうが便利です．低エネルギーでの場の理論を記述する作用を「低エネルギー有効作用」と呼びます．

IIA型弦理論を X でコンパクト化したときに現れる場には次のようなものがあります．まず，重力場が1個現れます．そして $h_{1,1}(X)+1$ 個の電磁場が現れます．他に X の大きさのパラメーターが低エネルギー理論の中で $h_{1,1}(X)$ 個のスカラー場（関数）として現れます．つまり，4次元の中の点 x におけるスカラー場の値 $t^A(x)$ がその点での X の大きさを表しています（図1）．他にもたくさんの場が現れますが，ここではあまり重要ではありません．

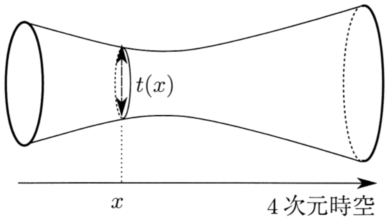


図1　スカラー場 $t^A(x)$ の意味．4次元時空内の場所によって内部空間であるカラビ–ヤウ多様体の大きさが変わります．その大きさが4次元ではスカラー場として見えます．

実は低エネルギー理論には超対称性というものがあって，様々な場がペアを作ったりしています．例えば $h_{1,1}(X)+1$ 個の電磁場のうち1個は重力場とペアになります．この電磁場のことを特にグラヴィフォトン（重力光子）と呼びます．他の $h_{1,1}$ 個の電磁場は，X の大きさを表すスカラー場 $h_{1,1}(X)$ 個とペアになっています．

式(8)は，この低エネルギー理論を記述する作用の一部です．R_+ は重力場，W_+ はグラヴィフォトン，t は大きさを表すスカラー場です．そしてここに現れている関数 $F_g(t)$ が位相的弦理論から計算できるもの，つまり式(7)の中の $F_g(t)$ と同じものです．

式(8)は，低エネルギー有効作用の一部に過ぎません．しかし，実はブラックホールのエントロピーはほとんどこの項のみから決まってしまうことが分かってきました．そして，それがOSV予想で大きな役割を果たしています．これから，そのOSV予想の中身を説明します．

5. ブラックホールとOSV予想

さて，考える模型はIIA型弦理論をカラビ–ヤウ多様体 X でコンパクト化してできる4次元の低エネルギー有効理論です．前節で述べたように，この理論には $h_{1,1}(X)+1$ 個の電磁場が存在します．だから，それぞれの電磁場に対して電荷や磁荷を考えることができます．ここでは，これらの電荷を q_Λ，$\Lambda=0,1,\cdots,h_{1,1}(X)$，磁荷を p^Λ と書くことにします．ただし，q_0, p^0 をグラヴィフォトン場に対する電荷，磁荷と言うことにします．

電荷磁荷 (q_Λ, p^Λ) を持つ「BPS」ブラックホールを考えることにします．BPSとは超対称性を半分保つという意味です．BPSの場合，質量は電荷と磁荷の値から決まっていますので独立なパラメーターではありません．OSV予想(1)はこの種のブラックホールに関する予想です．いまからこの式の意味を説明していきたいと思います．

まず，左辺の $Z_{\rm BH}$ からです．電荷磁荷を固定したときの状態数を $\Omega(q,p)$ とします．このとき

ブラックホールの分配関数 $Z_{\rm BH}(p,\phi)$ を次の式で定義します[*6]．

$$Z_{\rm BH}(p,\phi)=\sum_q \Omega(q,p)e^{-\sum_\Lambda \phi^\Lambda q_\Lambda}. \quad (9)$$

一方，式 (1) の右辺の $Z_{\rm top}$ は，式 (7) の $Z_{\rm top}(t,\lambda)$ の引数に次の値を代入したものです．

$$t^A=\frac{p^A+i\phi^A/\pi}{p^0+i\phi^0/\pi}, \quad A=1,\cdots,h_{1,1}(X), \qquad (10)$$
$$\lambda=\frac{4\pi i}{p^0+i\phi^0/\pi}.$$

これらを式 (1) に入れたもの

$$Z_{\rm BH}(p,\phi)=|Z_{\rm top}(t(p,\phi),\lambda(p,\phi))|^2 \quad (11)$$

が OSV 予想です．

ブラックホールの分配関数 (9) とブラックホールのエントロピーとの関係は次のとおりです．まず，電荷 q_A の「期待値」$\tilde{q}_\Lambda$ は

$$\tilde{q}_\Lambda = \frac{1}{Z_{\rm BH}}\sum_q q_\Lambda \Omega(q,p)e^{-\sum_\Lambda \phi^\Lambda q_\Lambda} = -\frac{\partial}{\partial\phi^\Lambda}\mathcal{F}_{\rm BH}(p,\phi). \qquad (12)$$

ここで $\mathcal{F}_{\rm BH}=\ln Z_{\rm BH}$ と書きました．この類の量はしばしば「自由エネルギー」と呼ばれます．この自由エネルギーとエントロピーは次のように関係しています．

$$S_{\rm BH}=\mathcal{F}_{\rm BH}+\sum_\Lambda \tilde{q}_\Lambda\phi^\Lambda. \qquad (13)$$

式 (11) に従えばこの $\mathcal{F}_{\rm BH}$，そしてブラックホールのエントロピー $S_{\rm BH}$ は位相的弦理論で計算できます．このエントロピーはベッケンシュタイン–ホーキングの式を拡張したウォルドの処方[11)]に従ってロペス・カルドソ，ドゥ・ウィット，モハウプト[1~3)]が計算したエントロピーに一致します．この計算の際に，作用が式 (8) を含んでいることが重要な役割を果たします．

*6) ϕ^Λ は電荷 q_Λ に対する化学ポテンシャルです．つまりこれは磁荷についてミクロ正準分布，電荷について大正準分布です．

6. 今後の展望 ——量子化にともなう離散化

OSV 予想や位相的弦理論に関して個人的に興味を持っているのは，「量子化にともなう離散化」です．量子力学では，古典的には連続量だと思われていたものが離散化するということがよくあります．例えば，古典的には角運動量は連続量ですが，量子論では離散的です．また，式 (3) に現れる「状態数」も古典的には連続量ですが，量子論的には整数です．

素朴には重力の量子化は「時空の量子化」だから時空が離散的になるのではと思ったりもするのですが，本当にそうなっているのかはよく分かりません．しかし，重力の量子化に伴って思いもよらなかった量が離散化するのは，どうも確かなようです．

例えば，OSV予想の式 (11) の式が意味するのは右辺の位相的弦理論の分配関数[*7)]を$\exp(-\sum q_\Lambda\phi^\Lambda)$で展開したときの係数が整数になるということです．これは位相的弦理論の立場から見るととても不思議なことです．

あるいはもう少し分かりやすいところでは，アトラクター機構によるケーラー・モジュライ空間の離散化があります．BPS ブラックホールの解を見ると地平線におけるカラビ–ヤウ多様体の大きさは，ブラックホールの電荷，磁荷 p^Λ, q_Λ のみによっていて，無限遠でのカラビ–ヤウ多様体の大きさや形にはよりません．この機構はアトラクター機構と呼ばれていてブラックホールのエントロピーの計算の中で重要な役割を果たしています．量子論を（少しだけでも）考慮すると p^Λ, q_Λ の値は整数になりますから BPS ブラックホールの地平線上でのケーラー・パラメーター（大きさのパラメーター）の値も離散化します．これは，ケーラー・モジュライ空間（ケーラー・パラメーターが張る空間）が離散化するかもしれない，ということを示唆しています．

*7) 厳密には右辺は形式的べき級数なのでそれを（非摂動論的補完して）足し上げなければなりません．

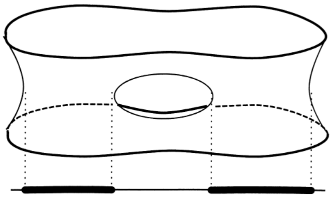


図 2　粒子の分布と時空の対応．下の線が 1 次元の粒子の分布を表します．太線が粒子が存在する部分，細線が粒子がない部分です．時空のトポロジーや計量はこの分布から決まります．

この手の話をさらに推し進めたものとしてカラビ–ヤウ結晶[12]の話があります．これはカラビ–ヤウ多様体をある種の結晶として模型化したもので，位相的弦理論の分配関数がこの結晶の分配関数に等しくなります．量子論を完全に考慮するとモジュライ空間のみならず，カラビ–ヤウ多様体そのものも離散化するということを示唆しています．

位相的弦理論とは別の話ですが，似たような離散化が起こるのが AdS/CFT 対応においてです．特に Bubbling geometry[13, 14]と呼ばれる解を考えると，この手の離散化が垣間見れるので少し説明します．

この対応によると，弦理論（量子重力理論）のうち，ある種の非常に簡単な部分については，1 次元の粒子の分布を考えるのと同等です．粒子の数が非常に大きいときには，古典重力理論の近似がよくなります．

この対応は例えば図 2 のようなものです．粒子数が多い場合，多数の粒子が集まってできる「水滴」を考えることができます．多数の水分子が集まって水滴ができているようなものを思い浮かべて下さい．この水滴が時空の穴に対応しています．さらにここから時空の計量も決めることができます．この場合，水滴の中の粒子数の整数性は，時空の立場からは電荷磁荷の整数性として見えます．

量子効果を取り入れるということは粒子の数が有限である効果を取り入れるということです．この場合，粒子を水滴としてではなく，図 3 のように一つ一つを本当に粒子として考えなければなりません．さらには，すべての粒子の分布について足し合わせるということをします．この場合，従来の時空の計量やトポロジーといった概念はもはや通用しなくなると思われます．

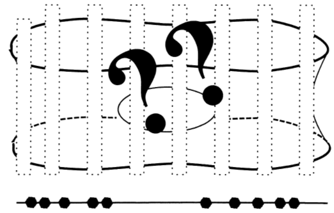


図 3　粒子の個数が多くない場合．もはや多様体としての時空の描像は曖昧になります．

こうして見ていくと，この手の離散化の種は大きく分けて「状態数」と「電荷，磁荷」の整数性にあると思えます．この辺が今後の研究のヒントになりそうです．完全な量子重力理論ができたとき，時空の幾何学に対する新しい描像が生まれるのかも知れません．

参考文献

1) G. Lopes Cardoso, B. de Wit and T. Mohaupt, *Phys. Lett. B* **451** (1999) 309.
2) G. Lopes Cardoso, B. de Wit and T. Mohaupt, *Fortsch. Phys.* **48** (2000) 49.
3) G. Lopes Cardoso, B. de Wit and T. Mohaupt, *Nucl. Phys. B* **567** (2000) 87.
4) H. Ooguri, A. Strominger and C. Vafa, *Phys. Rev. D* **70** (2004) 106007.
5) J.D. Bekenstein, *Phys. Rev. D* **7** (1973) 2333.
6) J.M. Bardeen, B. Carter and S.W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **31** (1973) 161.
7) S.W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **43** (1975) 199 [Erratum-ibid. **46** (1976) 206].
8) A. Strominger and C. Vafa, *Phys. Lett. B* **379** (1996) 99.
9) I. Antoniadis, E. Gava, K.S. Narain and T.R. Taylor, *Nucl. Phys. B* **413** (1994) 162.
10) M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri and C. Vafa, *Commun. Math. Phys.* **165** (1994) 311.
11) R.M. Wald, *Phys. Rev. D* **48** (1993) 3427.
12) A. Okounkov, N. Reshetikhin and C. Vafa, arXiv: hep-th/0309208.
13) H. Lin, O. Lunin and J.M. Maldacena, *JHEP* **0410** (2004) 025.
14) S. Yamaguchi, *Int. J. Mod. Phys. A* **22** (2007) 1353.

（やまぐち・さとし，ソウル国立大学）

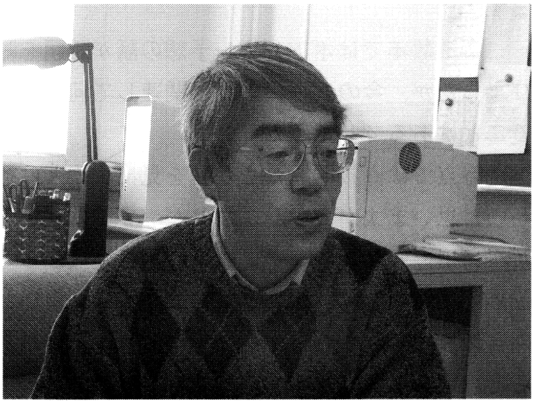
トポロジカルな弦理論とその幾何学を巡って

菅 野　浩 明（聞き手：編集部）

1. 位相的弦理論とは何か—幾何学化と対称性

——今回のテーマの軸である弦理論は，アインシュタイン（の一般相対論）以来の考え方を受け継ぐ理論として，幾何学との結びつきは欠かすことのできないものだと思いますが，このことについて重要となるポイントや歴史的背景などをお聞かせいただけますでしょうか．

まず一般的な話として，物理学において“対称性”という考え方が重要になってきたことが，幾何学との結びつきを生じさせた一つの大きな理由だと思います．幾何学とは何かという問いについては昔からいろいろと議論されてきて，いろいろな答えがあると思いますが，例えば一つの見方としては，対称性というものが具体的に目に見える形で実現されているとして，その実現の仕方に依らないものがどんなものかを考えることが幾何学であると言うことができます．逆に一見，非常に抽象的に見える対称性を“目に見えるように”実現しようとする場合にも幾何学は強力です．一方，最近の物理学では，様々な物理系で見え隠れしている対称性というものを通して，意味のある法則性は何かを考えることが重要になりました．この傾向が幾何学の在り方と非常に近くなってきたのだと思います．つまり，現代物理学の考え方が幾何学のそれと非常に近くなってきたということがポイントですね．その要になるものが“対称性”というわけです．弦理論はこのようなことを一つの美しい形として実現していると感じます．



菅野浩明氏．

もともとトポロジカルな場の理論というのはウィッテンが1988年頃に提唱したわけですが，それは場の理論で実現される対称性を極限まで押し進めるとどうなるか，またそれはどのように場の理論で実現されるかを追究していった結果たどりついたわけです．もちろん他にも数学的な動機はあったのですが，例えば一般相対論での一般共変性という対称性を極限まで押し進めていった場合に何が見えてくるか，といった問題を考えることで，その先に見えてくるものは位相的な理論にならざるを得ないであろう，とそういった経緯で提唱され

てきたわけです．ですので，トポロジカルな弦理論の話は一言で言うと，対称性の実現方法をある方向に究極的に押し進めた理論である，という位置づけができると思います．一般的に弦理論の力学は非常に難しいわけですが，こうした対称性の実現のされ方がもっとも見やすくなっていて，他の余分なものを全部とりさった後に残る“骨”に当たる部分が何かを考えると，それが現時点では今回のテーマであるトポロジカルな弦理論であると考えられています．しかし，場の理論に比べると弦理論における対称性の実現法に関する現在の理解はまだまだ不十分なものですから，これ以外にも対称性を押し進めて得られる弦理論があるかもしれません．

2. これからの幾何学像

――そうした研究を通して見えてくる新しい幾何学像というのはどういったものでしょうか．また，この研究はこれからどんな方向に広がりを見せる可能性があるでしょうか．

そうですね，もともと弦理論自体が時空の概念やゲージ理論，重力理論などあらゆるものを統一することを目指しているわけで，そうしたときに先ほど話したような対称性の考え方やその数学的記述の仕方としてどういう幾何学が適当かという問題が考えられてきたわけです．しかし現時点ではどんな方向にいくかはっきりと答えることは難しいように思います．ただ一つ言えることは，現代の幾何学は多様体と呼ばれるものをベースにして展開されているわけですが，多くの研究者がおそらくそれでは弦理論の記述に対しては不十分であろうと考えていると思います．

非可換幾何学というのは“点のない幾何学”とよく言われますが，これも一つの方向です．元々幾何学は，ユークリッド幾何学に見られるように平面や空間という“入れ物”の中にある図形を調べる，というのが出発点だったわけです．一方で，リーマンやアインシュタインたちが考えた幾何学から多様体という概念が生まれましたが，これは背景となる“入れ物”がない幾何学です．例えば一般相対性理論で宇宙の幾何学というものを議論しようとすると，宇宙には入れ物がないわけですから，まさに多様体の考え方が必要になるわけです．つまり，背景になる入れ物がないところでも展開できる幾何学が必要になったわけです．それは幾何学の非常に大きな進歩で，そうした歴史を振り返ってみると，弦理論などのさらに進んだ理論を記述するためには，こうした多様体の考え方からアイデアを進めて次のステップに進む必要があるわけです．その一つの候補として点という概念を必要としないもの (非可換幾何学) をどうやって作っていくかが課題なのだと思いますが，それはなかなか難しいですね．それがどういったものになるのか，時空がどういったものであるべきか，幾何学を記述する上でどういった方法が適当か，ということに関しては，現在では試行錯誤の状態ですね．

あるいは別の観点から言えることとして，経路積分のような考え方もあります．経路積分は数学的にはまだ定式化されているとは言えず，その正体はよくわかっていませんが，幾何学的に興味ある結果を形式的ですが直観的な方法でいろいろ出してくれています．そうしたことを自然に理解できるような幾何学が求められているようにも思います．

――ここ数年ではポアンカレ予想の話が話題を呼びましたが，今の多様体の話と関連して何か言えることはあるでしょうか．

現時点では直接的なつながりを見出すことは難しいと思いますが，ペレルマンがポアンカレ予想解決に用いたアプローチは微分幾何の観点からも改めてクローズアップされていますので，物理との自然な関わりがいろいろと出てくる可能性はあると思います．

3. 研究事情

——新しい幾何学を求めて様々な所から盛んに研究がなされてきたわけですが，これらの研究に関して，国内での環境や教育事情などをお聞かせ頂けますでしょうか.

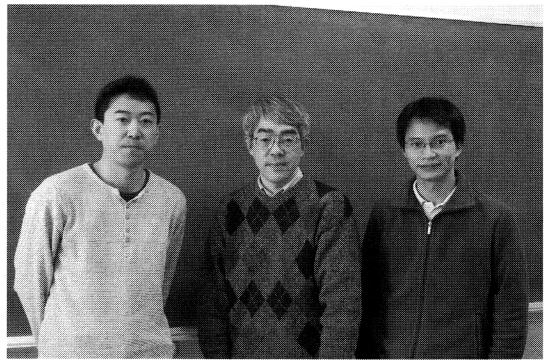
研究分野の広がりが多彩ということもあって，特定の方向は見出しにくく簡単に紹介するのは難しいと思います．これは物理と数学からそれぞれのアプローチができる分野であることとも関係しています．トポロジカルな弦理論の研究は歴史的には先ほどお話したような流れで始まったわけですが，最近では，いろいろなつながりができて多くの話題が絡み合っていますので，逆に学生やこの分野の研究を始めようという方には敷居が高くなってしまって手掛かりがつかみにくくなっているかもしれません．

ですから，むしろこの研究の事情や背景については世代的な違いもありますので，同じ（名古屋大学の）研究科にいる若手スタッフ（浜中真志氏と森山翔文氏）からも話を聞くのが的を射ていると思い，今日は同席して頂きました．

（ここから３人と編集部の座談）

菅野：私の年代は大学院生の頃にウィッテンがトポロジカルなことを言い出したわけで，自分の研究歴とトポロジカルな弦理論の発展がほとんど重なった世代なんですね．だから，学生の頃にそういう話が出てきて，ずっとそれを追いかけてきたのであまり抵抗感がないのですが，お二人が研究を始めた頃には，トポロジカルな研究というものがある程度市民権を得てきているのではないかと思うので，その辺りがどんな印象なのか聞かせていただけるとよいと思うのですがどうでしょう．

森山：トポロジカルな理論は厳密に解くことができるので，場の理論や弦理論を物理的に理解する上で非常に重宝されているものだ，という印象を私は持っています．



左から浜中真志氏，菅野浩明氏，森山翔文氏（菅野研究室にて）．

浜中：私の世代は，菅野さんがおっしゃるとおりトポロジカルな理論は概念として定着していたと思うのですが，多分あまりよく知らないんですね．どこかで勉強するというきっかけがなかったと言いますか….

菅野：それは先ほど話したことと同じなんですが，たぶんこれから研究する人にとっても敷居が高いし，そういうものを勉強する機会がないというか，場の量子論や弦理論の標準的なコースにはなかなか入ってないですよね．

浜中：そうですね，今だと堀健太朗さんたちの本（『Mirror Symmetry』，AMS）など標準的なものが出てきていますが，私が学生の頃はサイバーグ・ウィッテン理論の流行があって，AdS/CFTの流行があって，非可換理論の流行があって，…というような流れでしたので，物理の側からやっているとどれもまあトポロジカルなものではなかったんです．私は幸い，たまたま江口徹先生（京都大学基礎物理学研究所所長）や松尾泰先生（東京大学）が近くにいらっしゃったので，割合に馴染むことができたといったところです．

森山：私もそういった意味で，トポロジカルな理論に親しむ機会が少なかったですね．最近の菅野さんの授業でしっかり勉強できた，というのが本当のところです（笑）．

編集部：そうしますと，日本語の教科書でしっか

りと勉強するという環境はなかなかできていないわけですね.

浜中：そうですね，もしかすると堀さんたちの教科書で勉強している人が出てきているかもしれませんが….

菅野：しかしそれも洋書の大作なので難しいかもしれませんね．それと，位相的場の理論というのは一つの考え方にすぎないので，実際に何かに使えるという話にならないと，なかなかそれを勉強しようという気は起きないと思いますね．ですから，先ほど話しましたように，様々な場面でつながりがあることが見えてくる話なので，これと特定して状況を話すことは難しいと思うんです.

浜中：私はまだトポロジカルな理論を自分の研究で使ったことがありませんし，こういう特集があるととてもよいのではないかと思います.

（座談終わる）

4. この研究に求められること

——今のお話では，この研究に入ってくる学生にとって敷居が高くなっているようですが，そういった状況の中で何が求められるでしょうか.

そうですね，特定の分野を勉強しておけば十分とは言えませんし，何が役に立つか予想もつきませんから，やはりできるだけ幅広く知識を身につけておくことが大切だと思います．それと，実際に手を動かしてみて何か一つ自分の得意なものをつくっておくことが大切だと思います．これはある意味で矛盾しますけれども，いろいろな知識は必要になりますが，たくさんいる研究者の中で，他人にはない自分の個性というか得意なものを磨いておくことも将来的には役立つと思います.

5. 研究に入った動機，影響を受けたもの

——先生ご自身がこの研究をされるに至った動機や影響を受けたものをお教え頂けますでしょうか.

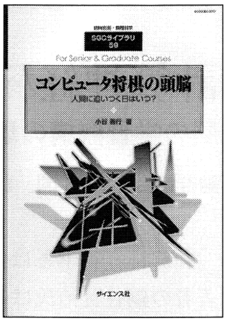
私は，物理をやる上で数学の有用性というものに感銘を受けたという経験がとても大きいですね．それをもっと理解していきたいとずっと続けてきて，現在こういう研究をしています．大学に入学した当時，くり込み理論とか量子電磁気学とかが人類が手にした理論の中で実験と最も高い精度で合うものであるといったような話を聞いて，そういった理論を勉強したいと思っていくつか本を読んだのですが，それらをきちんと理解するには数学が正しく使えないといけないということを感じましたし，数学の言葉を使うことによってそこに書かれてあることの理解が深まるという体験を何度かしました．私の場合はそういったことが現在に至った出発点です.

物事を理解するのにどういう理解の仕方をするかは人それぞれだと思いますが，私の場合は物理の本や論文などに出てくる話を，数学を使って自分なりに翻訳をしたり言い換えをしてみるという理解の仕方が性に合っていました．そういう作業や経験が積み重なって，現在の自分の研究があると思います.

——本日は貴重なお話をお聞かせ下さり，誠にありがとうございました.

（2008 年 3 月，
名古屋大学東山キャンパス研究室にて）

（かんの・ひろあき，名古屋大学大学院多元数理科学研究科）



コンピュータ将棋の頭脳

人間に追いつく日はいつ？

小谷善行著，B5 判，128 頁，本体 1429 円，サイエンス社

本書は黎明期から現在に至るまでコンピュータ将棋の研究を行っている著者により書かれたもので，コンピュータ将棋の初期の状況から最先端技術までの様々な構成要素が分かりやすく解説されている．また，現在のコンピュータが成立する前から研究されていたコンピュータチェスの技術，詰将棋に関する解法や生成の技術，コンピュータ将棋がトッププロに勝つ日とその後についても述べられている．

技術的な解説としては，(1) データ構造，(2) 探索アルゴリズム，特に，min-max 原理 (*)，$\alpha\beta$ 法 (*)，評価関数，捕獲探索（静止探索），(3) 探索の工夫，特に，手を読む順序の制御 (*)，シンギュラーエクステンションと呼ばれるチェスで用いられて成功した手の拡張（延長）法，実現確率探索，並列探索，ヌル（空）手探索とヌルウィンドウ探索，トランスポジションテーブルとハッシュ関数の構成法 (*)，学習とチューニング，(4) 詰将棋に関して，反復深化法，証明数 (*) と反証明数，df-pn（深さ優先証明数）探索 (*)，および自動生成法について述べられている．(*) の項目では C 言語風に書き下したアルゴリズムまたは詳細な説明が付けられており，コンピュータ将棋の理解に役立つ．

また，半分くらいの章には参考文献が挙げられており，最後の章には情報源として多くの文献や Web ページが挙げられている．本書と合わせてそれらを参照することにより，コンピュータ将棋や詰将棋のプログラムが作成できる．評者としても，多くの方に本書を読んでコンピュータ将棋のアルゴリズムに興味を持っていただき，独自の工夫を加えてコンピュータ将棋の世界に参入していただきたいと考える．

コンピュータ将棋は，「世界コンピュータ将棋選手権」で 2004 年に YSS が優勝した頃から急速に強くなり，2005 年に激指が実現確率探索を実装して優勝し，招待され参加したアマチュア竜王戦全国大会で 3 勝して本戦 2 回戦まで進出（全国ベスト 16 入り）し，さらにプロの竜王戦挑戦者に角落ちで勝つなどの実績を上げた．2006 年には初参加の Bonanza が（作者は当時カナダ在住）学習と全幅探索というチェスでよく用いられていたが将棋では無理だとしてそれまであまり用いられていなかった手法を用いて優勝し，2007 年に入りトッププロ棋士の一人である渡辺明竜王と平手（ハンディキャップなし）で対戦し負けたものの大善戦で将棋ファンを驚かせる活躍を見せた．2007 年の選手権では再び YSS が優勝し，上位プログラムがしのぎを削る状況になってきており，今後も目が離せない．本書でも，最先端技術に基づいて書かれた現在のトッププログラムの強さを推し量ることができる選手権のあらましや，最近の人間との対局について述べられている．なお，コンピュータ詰将棋は，解法では既にプロ棋士のレベルを越えていることも述べられている．

最後のほうの章には，コンピュータ将棋が人間のトッププロに勝つ日のことが書かれている．将棋ファンにはショッキングなことであるが，レーティング計算によりトッププロとトッププログラムとの差異は確実に小さくなっており，このまま進めば，やがてコンピュータ将棋がトッププロを追い越すことはやむを得ない．しかし，人間の側も，コンピュータ将棋を研究することで負ける日を先延ばしすることができる．一方，たとえトッププロに勝ったとしても，その先にもやるべきことは多い．将棋を解く（並べ終えた局面から双方が最善に指していくと，結論はどうなるか，先手勝ちか，後手勝ちか，引き分けか，を具体的な手順をもって示す）ことと，人間が行うように将棋を学習していくことである．

コンピュータ将棋は，探索空間や $\alpha\beta$ 法などコンピュータチェスの技術を応用して開発が始まったが，将棋はチェスより各局面での可能な指し手が多く，また，初期局面から終局までの手数が長いためチェスより複雑なゲームであり，コンピュータ将棋の開発には様々な特殊な工夫が必要だと考えられていたが，2006 年の Bonanza の出現により，必ずしもそうではないことが示された．一方，さらに強いプログラムを作成するためには，やはり，いくつかの将棋特有の技術が必要なように思える．本書はこれら最先端技術を紹介すると同時に，コンピュータ将棋の将来像についても考察してあり，トッププロに勝つのはいつか，などの予想をするのにも役に立つものである．

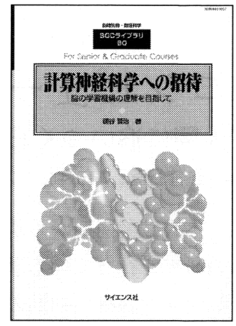
瀧澤 武信（早稲田大学政治経済学術院）

BOOK REVIEW

計算神経科学への招待

脳の学習機構の理解を目指して

銅谷賢治著，B5 判，128 頁，本体 1429 円，サイエンス社



計算神経科学とは何か？ その質問への回答として著者の銅谷賢治氏はこの本をまとめたのだと思うが，恐らく満足はしていないだろう．

第 1 章を見るとそう考える理由が理解できると思う．計算神経科学とは数理的な理論，そしてシミュレーションや工学的なハードウェアを構築することを通じて脳を理解しようという学問だ，とある．その背景にある学問は幅広い．生理学，医学，心理学は言うに及ばず，確率，統計，情報学，さらにセンサーやロボットなど工学の分野までもが含まれる．そもそもこれを 100 頁や 200 頁でまとめようとしても不可能だ．著者が満足することは難しい．

本書の魅力は個々の結果の解説にあるのではなく，それぞれのアプローチのつながりを明らかにし，その背後にある脳の機能の本質を迫ろうとしている点にある．そのために脳科学全体を俯瞰し，多くの話題に言及している．以下では計算神経科学と本書の魅力について私見を述べる．

脳の理解には様々なレベルがあるから多少の誤解を生じるかもしれないが，恐れずに書くならば，計算神経科学において重要なのは脳が行なう情報処理の本質をいかに抽出するか，という点なのだろう．その際に数式やシミュレーションを用いることもあるだろう，あるいはセンサーやロボットを作り具現化するほうが良いかもしれない．いずれにせよ，神経や脳の持つ基本的な情報処理機能は何か，ということに対する構成的研究が計算神経科学なのだと私は理解している．もちろん理論だけではなく，生理学的な実験を通じた検証も不可欠である．計算神経科学と生理学が補い合って脳研究が進めば理想的である．

本書からは，脳研究の広い部分を扱おうという著者の意思が感じられる．その構成は，ニューロンの数理的モデル（2 章）と測定によって得られたニューロンのデータ解析（3 章），教師あり学習の理論（4 章）と脳内におけるその例としての小脳（5 章），強化学習の理論（6 章）と報酬付きの学習に関連する大脳基底核（7 章），教師なし学習の理論（8 章）とそれが実現されている大脳皮質（9 章），メタ学習の考え方（10 章）と脳内で同様の働きを持つと考えられる神経修飾物質系（11 章）といったように 2 つの章が組となって書かれている．それぞれの組は脳の情報処理に関する重要な概念を扱っており，複数の側面からの説明を与え，それを実現する脳の仕組みを明らかにするためにどのような研究が行なわれているのかを説明している．各組の構成は最初の章で数理的なモデルを，次の章でそれに対応する生理学的な知見や研究を示す形をとっている．計算神経科学的な理論はトップダウン的な知見であるから初めに配し，ボトムアップ的な生理学的知見を後に置いているのだろう．

誌面の制限から各研究に対する説明は必ずしも十分ではない．しかし，細かいことは後に読者が文献から学ぶことができる．それぞれの研究が脳研究のどのような問題意識に基づいて何を明らかにしようという研究なのか，という全体の位置付けを理解することのほうが一般に難しい．本書はこの難しい部分の解説書であり指南書である．

もう一つ述べておこう．言うまでもなく脳の理解は難しい．そして計算神経科学も発展途上の分野である．2 章から 11 章で扱っている内容がすべて明らかになったとしても，まだまだ脳の完全な理解には程遠い．12 章から 14 章では今後の脳研究において重要だと思われる概念について述べられている．これらも脳の持つ機能の一部でしかない．聡明な読者はこの一冊で脳研究のすべてが分るとは思わないだろうが，一方で計算神経科学は興味深い問題が多く残っている分野であることも感じられれば本書の目的が達せられるのではないだろうか．

脳研究に興味を持つ学生は，本書を通じてその広がりを垣間見ることができるだろう．また現在脳研究に携わっている者は，脳研究に対する異なる視点を感じることができるのではないだろうか．本書を手にした者が計算神経科学に興味を持つ，あるいは志すことになれば，それが著者の喜びであろう．近い将来，本書をまとめたことに銅谷氏は満足するのではないだろうか．

池田　思朗（統計数理研究所）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

巌佐 庸　　　　1978年9月号

この特集では，主に生態学を対象にした数理モデルの研究が紹介されている．生物の個体数変動のカオス，捕食者とその餌とのダイナミックス，複数の生物種が作り出す空間分布などが議論された．これらの研究は30年間に格段に発展した．いまでは生態学は，生物学の中でも数理モデルに基づく理論的研究の役割が最もよく確立している分野である．

私自身は，生物の成長・死亡・繁殖などのスケジュールを適応戦略として考えたらどうなるかを議論した．生物は長い進化の過程を生き抜いてきた．少しでも多くの子を残せるような生き方をしたものが現れると，広がってもとのタイプと置き換わる．これが繰り返されると，長い年月の後には与えられた状況でできるだけ多くの子を残せるような挙動をとるタイプばかりになるはずだ．このような進化の最終状態を知るには，制御工学で発展してきた最適化の数学が使える．

確率的に変動する環境や不確定な状況のもとでは，行動しながら経験に基づいて環境の推定を変更するというベイズ型の意思決定が使える．また複数個体が相互作用するときには，それらの利害が対立することが多いが，その場合には，単なる最適化ではなく社会科学で発達してきたゲーム理論で扱わねばならない．

これらの数理的手法が生物学の中に怒濤のように入りこんできたのは，本特集号のあと，1980年代および1990年代を通じてであった．いまではゲーム理論や動的最適化は，生態学や動物行動学の基本コンセプトになっている．

私は集団全体として生き残る数を最大にするとすればどのような死に方をするものになるか，を計算したが，これには問題がある．生物が集団全体のために死ぬということはありそうにないからだ．

魚などの水産生物は，生活史の初期には遊泳力の小さいプランクトンとして過ごすが，この時期は他の魚に食われるため毎日非常に高い死亡率を経験する．大きな卵からスタートすればこの危険な時期を早く終えられるので，生き残って成熟できる割合は格段にあがる．だから産卵時にそれぞれの卵にどれだけずつの栄養を分けるかを，母親が決めるのはありそうだ．もし先ほどの集団が，1個体の母親から産まれた子からなる場合には，それらの集団全体のうち生き残った数を最大にするように進化するというのはあり得る．しかし，もし多数の母親が産んだ子供どうしが争うとすれば，ゲームモデルにしないといけない．このように生物の適応戦略を考えるときには，何を適応性の尺度にとるべきかについては，進化の状況をよく考えて注意深く選ばねばならない．



（いわさ・よう，九州大学大学院理学研究院）



物理の道しるべ
～研究者の道とは何か～
第4回

できそこないの物理学者の歩み

吉川　研一

1. はじめに

“研究者の道とは何か” と題した一文を編集部から依頼されたが，今日まで，私は物理も数学もあまり高度な勉強はして来ていない．本誌の読者に対して，教訓めいた言い方のできるような柄ではない．恥ずかしながら，このような大それた題の下，一文をしたためるなど，とてもできそうにない．ただ，ここで考え直し，このような不勉強者でも，成り行き次第では，物理学の研究者となることもあるといった意味なら，読者の参考になるかもしれないと思った．いまから思い起こしてみると，人との出会いこそが，私の研究者人生を決定してきた最大の要因であった．そこで，はなはだ個人的なことになって恐縮であるが，私にとってのメンター（精神的な指導者）の思い出を紹介させていただくことにしたい．

2. 量子化学との出会い：大学院時代

学園紛争の吹き荒れる真っ只中で，私は学部学生時代を過ごした．特に，学部 2, 3 回生のころには，ストライキや封鎖が頻繁に起こり，とても落ち着いて勉強するような雰囲気ではなかった．大学に入学した時点では，正義を重んじて生きていくよりも，時代の流れにあえて逆らわず，人との付き合いも適当にするのが，要領の良い世渡りの仕方であると，漠然と思っていた．ある意味では，今年若くして当選した，ある知事の立ち居振舞いと，どこか似たところがあったのではと感じている（もちろん彼ほど，徹底して，上に媚び，下につらくあたっていたわけではないが）．

工学部の化学系学科から，そのまま大学院に進学して（1971 年），ようやく研究らしきものに手を染めるようになった．配属された研究室では，核磁気共鳴の実験や量子化学計算の手法について，手ほどきを受けた．私は，化学系の研究室に身を置いていたので，本格的な量子力学などの勉強は専ら独学であり，現代物理の基礎のできていない，足元のぐらついていた学生であったと思う．ただ，先輩や同輩にはとてもよくできる人たちが居て（平尾公彦，加藤重樹氏など），経路積分やグリーン関数による，電子の多体問題など，当時では最先端の理論物理の手法を取り入れて，精力的に研究を展開している，そのような雰囲気があった．当時は，学園紛争の名残の影響もあり，講座の枠を越えて研究を進めるのが当たり前で，格好が良いといったような，時代の空気があり，毎週の研究会も，他の研究室の理論グループの若手の教官や院生と共催で行われ，自らが所属する研究室の教授

をたてるといったような配慮は全くなかった．私の取り組んだテーマは，有機化合物の立体構造や安定性・反応性を，量子論的な電子雲の対称性でもって議論しようとするもので，実験と“理論”両面からの研究であった．ここで，“理論”と記したことには訳がある．当時，量子化学の分野では，半経験的な分子軌道法といった枠組みが，先人たちによってすでに確立していた．あとは，適当にパラメータをとり，大学付置の大型計算機センターでコンピュータを走らせ，出てきた電子雲の偏りやエネルギーに関する数値の塊を調べて，実験と対比させる．これが，“理論”であった（少なくとも，私の研究のスタイルとしては）．他人が血のにじむような努力をして仕上げたプログラムを使って，量子論の基礎のできていない私のようなものが，大型計算機で計算し，それを持って最先端の理論研究を称して，論文を書き，学会発表していたわけである．大学院時代には，そのような安易な研究ではあったが，当時，化学で一流と思われていた雑誌に，6–7報の論文を発表したこともあり，トップクラスの研究者への仲間入りをしつつあると，生意気にも思っていた．

大学院時代を通して，心に残るメンターとして，加藤博先生との出会いがあった．加藤先生は，京大での身分は非常勤講師であり学生への接触の仕方にも気を使っておられたが，毎週の若手の研究会にはほとんど毎回出席され，暖かくも厳しいコメントをされておられた．加藤先生からは，コンピュータを使う“計算機実験”だけではなく，電子相関などの難問を避けずに，現象の背後に潜む，重要な原理を探ることといった，研究の進め方を教えていただいた．流行に乗った仕事ではなく，自らの頭で考え，自らが面白いと思う研究を突き進めばよい，といったことを，戒めの言葉ではなく，加藤先生の生活スタイルの中で，教えていただいたような気がしている．福井謙一先生とも，議論を交わす機会は多くはなかったが，闇雲に研究を進めている私をやさしく見守っていただいていたことには，感謝のしすぎはないと思っている．

大学院を修了して学位論文をまとめる頃には，個々の分子の構造や電子の状態を問題にする量子化学よりも，多数の分子が集合してできる，より上の階層の現象に少しずつ興味が移りつつあった．もう少し生意気な言い方をすると，これから私にとってのライフワークとすべき研究は，生命現象を含めた，マクロな時間的空間的秩序の自己生成にあるとの気持ちを強めつつあった．ただ，研究室の周りの雰囲気は，コンピュータの進歩もあって，量子化学はますます熱気に溢れる研究領域となりつつあった．福井謙一先生のノーベル賞受賞はその数年後である．

3. 非線形との出会い：徳島大学

学位取得後，10回ほどの公募人事に尽く失敗し，オーバードクターにも見切りをつけて，他の道に転進しようと思っていたときに，期せずして，徳島大学の教養部の公募人事で採用が決まった．それまでの公募の失敗の教訓を生かして，徳島大学には，推薦状を添付せずに応募したのが功を奏したようである（このあたりの事情は，文章にして残すには支障があるので，何があったのかは，読者のほうで適当に推測願いたい）．

京都に居たときには，研究室の周りには，優れた量子化学者が活発に研究を進めており，実験設備としても，日本にただ一台しかない超伝導核磁気共鳴（NMR）装置を縦横に使えるなど，今から思うととても恵まれた環境であった．徳島大学の教養部に移ると，量子化学分野の研究者は皆無，まともな実験機器もなく，また，一緒に研究をしてくれる学生・院生が居ないといった研究環境であった．ただ，悲壮感は不思議なほどなく，むしろ，言いようのない開放感に満ちた，明るい気分に浸ることができた．これは，採用していただいたのが教養部であったので，私自身は未だ20歳代の後半であったにも関わらず，上司の存在しない，自分が主宰する自分ひとりの研究室で仕事をすることができたためである．すなわち，自分の判断で自由に研究することが許されるような環境であった．このように，若き研究者に自由を与え

るような場は，当時の日本の大学の中では珍しいことであった．

徳島大学では生命科学分野の研究が活発であり，そのような環境を生かして共同研究を進めることにより，それまでは私にとっては，未知の分野であった生物がらみの問題を実践的に勉強することができた．この時代の経験は，現在でも私自身のものの考え方の伏流となっており，生命現象について，何が重要であり，何が一時の流行に過ぎないのかといったことに対する直感はこの時代の共同研究者でありメンターでもあった方々（薬学部の寺田弘氏や予防衛生研究所の逢坂昭氏など）たちから学び取ったものである．

教養部に赴任して，数年経つと，隣の建物の教育学部の先生方とも知り合いになり，教育学部の小学校教員養成課程の学生の卒業研究を任されるようになった．当時，統計力学の世界でも，非線形非平衡現象に研究のベクトルが向かいつつあり，振動的化学反応（ジャボチンスキー反応）で見られる興奮波の時空パターンなどが，物理や数学者の間で話題となっていた．そこで，小学校教員養成課程の学生のテーマとして，このような化学的振動反応や，流体のリズム現象を教材開発といった視点で取り上げるようにした．

この当時，私が，地方大学の教養部において，研究者として生き残るための戦略として，漠然と考えていたのは，次のような方法であった．すなわち，これからの大きなテーマとしては，非線形非平衡を取り上げるが，これで，第一線のレベルをいきなり行うことには無理がある．そこで，教材開発と銘して，教育学部の学生と一緒に実験をして，非線形科学分野での研究の勘やセンスを磨くことにした．一方で，研究者として，生き残るためには，それなりのレベルの論文を書き続ける必要がある．そのためには，生命科学領域に，私の得意技であった量子化学や核磁気共鳴を応用した研究も同時に進めた．実際，10 年余りの徳島大学での在籍中には，このような研究の進め方により，毎年途切れることなく論文を出しつつも，次第に非線形非平衡のほうに研究の比重を傾けていった．

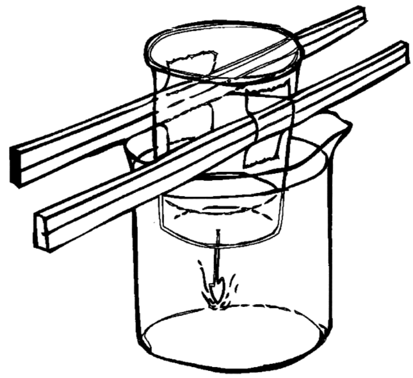


図 1　塩水振動子の“実験装置”．

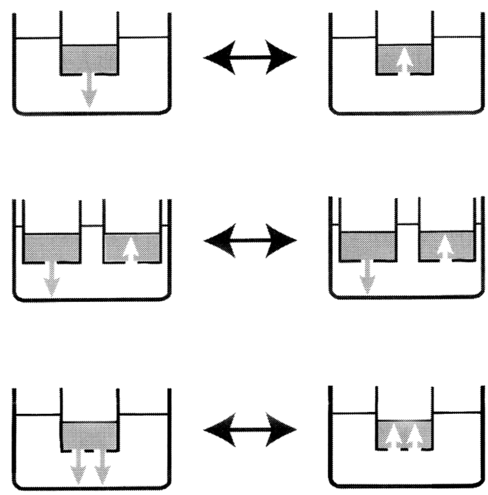


図 2　塩水振動子の模式図（上から単一振動子，逆相同調，同相同調）．岡村・吉川，本誌，No.408, p.7 (1997) 参照．

ここで，当時行った，教育学部の学生の研究ならではの実験を一つ紹介しておきたい．

塩水振動子と称するものである．コップの中に塩水を入れる．このコップの底にはあらかじめ，直径 1 mm 程度の穴を開けておく．このコップを，真水を入れた容器に浸して固定する（図 1）．すると，まず密度の高い塩水がコップから穴を通して，流れ落ちる．しばらくこの下向きの流れが続くと，突然，この塩水の流れが止まり，真水が浸した容器から，コップの中に，穴を通して，吹き上がる（図 2）．この上向き，下向きの流れのリズムは，100 回程度持続する．この現象は，アメリカの海洋学者の Martin が見つけたものであり，彼も，海

洋での密度の反転に伴う減少を，学生への演示実験で行おうと，装置の工夫をしているときにたまたま見つけたものという．ただ，彼は海洋での現象の実験研究者であったこともあり，この塩水の振動現象を，非平衡系でのリミットサイクルであるとの視点は持たなかった．私は，このリズム現象に注目し，その本質が簡単な非線形の常微分方程式で書き下ろせること．さらに，結合振動子系の実験を進めることにより，多様な結合モードが生じることなどを明らかにすることができた．

このような，研究を進めているときに，ある県外での研究会で，徳島大学の電気電子工学の川上博教授（現徳島大学副学長）と知り合いになることができた．川上教授は，京大の工学部の林千博教授の研究室の出身であり，大学院生として在籍中に，カオスの名前が世の中に知られるよりも以前に，上田睆亮氏らとともに，簡単な常微分方程式系（Duffing oscillator）でカオスが起こることを見つけていたことで知られている．私はそれまで，数学で言うところの力学系は，全くといっていいほど勉強をしていなかった．川上先生は，まるでできの悪い学部学生に丁寧に教えるようにして，私に分岐や平衡点など，基本的なことが分かるように仕向けてくれた．

4. 高分子物理との出会い：名古屋大学

徳島大学に12年ほど在籍した後，機会があり，名古屋大学の教養部に移ることとなった．名古屋大学では，化学領域の非線形現象についての研究をまずもって，中心的なテーマとして取り上げて研究を進めることにした．特に，“生命現象”についてはまだ現代の学問研究では，その本質を捉え切れていないことが，自分の目ではますます明らかになってきているような気がしてきていた．学問全体の流れとしては，この時代は，生命科学分野のバブル現象のはしりの時期にあたっていた．個々の遺伝子の情報を世界中で競争して明らかにすることは，その後ますますヒートアップしてきている．しかしながら，１次元の紐状分子に刻み込まれた固定メモリーに，生命体の時空間４次元の情報がそのまま載っているはずはない．これが，その当時，私自身が漠然と思っていたことであった．

一方，非線形の仕事も次第に軌道に乗り，興奮型の化学センサーや，フラストレートした結合振動子系の研究など，の仕事が進んできていた．そこで次の展開として，非線形ダイナミクスの研究を生命現象にその対象を広げたいと考えた．その際，分子生物学的な近年の研究の進歩を取り入れ，要素還元主義には陥らない形で，要素から（個々の遺伝子情報），生きたシステムが作られるそのシナリオを調べたいと思うに至った．

私が名古屋大学に移動してまもなく，土井正男氏が名古屋大学に赴任してきた．その当時すでに高分子の理論研究の，世界での第一人者であった土井氏と会う機会があり話をしたところ，彼から，DNAの研究をしないかと勧められた．どうも，電気泳動でもって，数mmほどもあるDNA分子を選り分けることが，ホットな課題となっており，それに対して物理的なアプローチをすることを計画しているとのことであった．渡りに船とはこのことで，私の研究室では，早速，長いDNA分子の１分子観察の実験を，顕微鏡を用いて行うことにした．その当時，徳島大学の修士を終えて南川君が博士課程に，また徳島大学の学部を卒業して松沢さんが修士課程にと，私の研究グループに参加してくれたので，この機会に，２人に相談してDNA研究を開始した．その後，土井氏との共同研究も比較的順調に進展し，電気泳動により長いDNA分子を選り分けるメカニズムもその本質が次第に分かってきた．これらは，数編の共著論文として発表もしている．このように，DNAの１分子観測の実験手法がようやく確立し，研究も進んでいる頃，土井研に，モスクワ大学の物理学部から，Khokhlov教授が半年滞在するといったことがあった．Khokhlov教授は，高分子物理の専門家で，その世代は土井氏や私とほぼ同じ研究者である．Khokhlov教授と話をするうちに，DNA分子の折りたたみ転移（コイル・グロビュール転移）を，１分子レベルで観測すると面白いのではとい



Khokhlov 教授の自宅にて（モスクワ，1992 年）.

うことになり，南川君，松沢さんらが実際の測定を行ってくれた．すると，各々単一の DNA 分子が，all-or-none の折りたたみ転移をすることが見えてきた．

その当時，1990 年代の前半，高分子物理学の常識は，単一高分子の折りたたみ転移は連続的になるといったものであった．これは，コイル状態が分子鎖のエントロピーが折りたたまれた状態よりも大きいために，折りたたみ転移を引き起こすためにはモノマー間の相互作用を引力的にする必要がある，との考えによるものである．すなわち，1 分子鎖のレベルでは，分子鎖のゆらぎの効果のために，折りたたみ転移は必ず連続的になってしまうと信じられていた．これは，分子鎖の構造についての分配関数が，格子モデルを用いると“厳密に”見積もることができ，そのような理論的な考察によって，連続転移の描像が確立していたためである．しかしながら，格子モデルでは，モノマーの長さと太さが同じであるとの仮定が採用されている．しかしながら，DNA 分子の場合，モノマーの相当する持続長と，分子鎖の太さの比は数十倍にもなり，格子モデルは不適切となる．

その後，私たちは，Khokhlov 教授のグループと 10 年余りに渡って，理論・実験の両面からの共同研究を進め，DNA に限らず半剛直 (semiflexible) の高分子鎖では，折りたたみ転移は，無秩序—秩序転移の様相を示し，1 次相転移を引き起こすことを明らかにしてきている．

このように，土井氏，Khokhlov 氏らとの出会いを通して，1 本の紐状分子に秘められた謎を解くことを楽しむことができた．

5. 現在へ，さらに多くの出会いが

私たちの研究室では，非線形・非平衡系の研究を多方面にわたって進めている．個々のテーマは，研究員や大学院生が自ら課題を設定することを基本としている．私が，このような研究を日夜楽しんでおられるのも，若き彼らとの出会いがあってのことである．

これまでに研究を共にした，研究者たちに，心からお礼の言葉を言わせていただきたい．

（よしかわ・けんいち，京都大学大学院理学研究科）



数学の道しるべ
～研究者の道とは何か～
第3回

ささやかな経験

磯崎　洋

1. 孤独な生活ではない

初めて外国での研究集会に出席したのは1983年のドイツのオーベルヴォルファッハでのシュレーディンガー方程式のワークショップであった．その頃は量子力学における多体系の散乱問題の研究や，偏微分方程式論での基本的な手段である超局所解析のシュレーディンガー方程式への応用が盛んになり始めたときで，研究発表そのものは大きな刺激になった．時間に依存する波動作用素の研究方法を創始したフォルカー・エンスはそのときの大スターで講演は粒子像と波動像に関する直観に支えられながら流れるように進み，講演時間が超過しても座長のウィルコックスがそのまま続けさせていた．その前に米国で講演したときは，“Are you Shakespear?” という声が聴衆から出たという．まさに上質の芸術を見る思いがした．

自分の研究発表でも緊張したが，食事のときがまた大変だった．ナプキンに出席者の名前を書いてシャッフルし見知らぬ人どうしが隣合わせるようにする．会話と食事が楽しめるようにという計らいなのだが食卓での話題にはとてもついていけない．語学力のなさだけでなしに，そもそも日本以外の事情を知らないのだから理解不可能で話のしようもない．ドイツでは西瓜に砂糖をかける，というどうでもよいことのみが記憶に残っている．それでも何人か知り合いができて今日に至るまで交友が続いているのは幸運であった．

このときの経験が強く印象に残って，海外渡航を繰り返すこととなった．何度か外国滞在をするうちに感じ出したのは，学問の世界は横社会であるということであった．日本の中では数学の議論をするときでも上下関係を意識せざるを得ない．しかし異国では年齢も経歴も違う人たちが初対面で挨拶もそこそこに長時間数学の話をして尽きることがない．考えてきたことに共通なものが多いからである．直接の交友期間は短いのだが，帰国後も昔からの知り合いのような気分になっている．このようにして得られた経験は貴重なもので数学のみならず，他のことでも自分の狭い考えを大分変えてくれた．学問上の競争と最近よく言われるようになったが，そのような単純な図式的思考をするものではない．むしろ長い間共通の問題と格闘した戦友とでも言うのが正しいだろう．すぐれた個性との出会いは無理をしてでも求める価値がある．

2. 講演するには

語学の力のみでなく，話をするという態度その



ミッターク・レフラー研究所（1985 年 12 月 11 日撮影）．

ものがお互いの理解や研究の評価に有形無形の影響を与えているように思われる．単に流暢に話せるという意味ではない．内容を伝えられる力である．米国人の研究者には洒落たジョークの得意な人がよく見かけられる．普段から小噺の種を収集していなくてはできないことである．イングリッシュジェントルメンはスピーチを得意とする．いろいろな機会に鍛えられ，磨かれてきているのだろうと思われる．このようなことはとても真似できない．気圧されるばかりである．フランスの人たちは高校の頃から人前でまとまった話をする訓練をする．話術，というよりは講演術が，一つの文化であり身につけるべき基本的な素養となっているように思われる．

日本でのいわゆる対談番組の作り方に毒されていたものか，講演は服装を整え，檀上で文語的表現をするものであり，それは表面を繕った仮の姿であって，着流しのくつろいだ話の中に本当の姿が表れる，というような考え方が沁みついていたのだが，それこそ類型的理解であった．すべての人と胸襟を開いて話す，ということができるはずもない．大勢の前でも一人が相手でも話す態度に変わりはない．日本語，外国語を問わず，分かり易い言葉で順序よく話す，ということが基本である．よほど語学に自信があるのでない限り，無理に洒落た表現などしなくてよい．講演の内容を理解してくれた人のうちの何人かだけが後で話しかけてくれるのである．そのような人たちから相互理解の輪がひろがってゆく．

3. 思い出の研究所

ミッターク・レフラー研究所はストックホルムの郊外にある（写真参照）．周囲には大使館が多い閑静なところで，やや小高い広い敷地の中にドームのついた 3 階建ての建物が立っている．ミッターク・レフラーが自分用の別荘として作ったものでもっと増築するはずであったが，株の暴落で断念したとのことである．現在はデンマーク，ノルウェー，スウェーデンの北欧 3 国で共同管理している．初めてそこを訪れたときはヘルマンダーが所長をしていた．気さくに所内を案内してくれたが，中 2 階のバルト海を覗く窓の前の机を示して，ミッターク・レフラーはこの机を愛用して海を見下ろしな

がら研究していたのだ，と説明してくれた．目の前に広がる氷結した白い海を今でも覚えている．次に訪れたのは畏友アーネ・エンセンが催したシュレーディンガー作用素のワークショップのときで3月にひと月間滞在した．講演会場は昔，食堂にしていたところで，まず皆で集まってお茶を飲んだ後，話が始まることになっていた．セミナー開始のときに小さい鐘をならすのが主催者の役目で，エンセンがいかにも楽しそうに壁につけられた鐘をコンコンと鳴らしていた．所内の壁にはぎっしりと本が並べてあり，あちこちに古い机がおいてある．地球儀があったが，その中の日本の首都はEdoとなっていた．後日，そのどれかの机の引き出しの中からポアンカレーの最初の3体問題の原稿が見つかった，と報道された．さては，あのときもっと机の中をよく見ておくべきだった，と残念がった．

インドにもひと月滞在したことがある．マドラスの研究所の中庭の屋外セミナー室は柱と藁ぶき屋根だけで，そこに黒板をおいて風通しを楽しみながら議論した．赤道直下で正午には太陽が頭上にあって自分の影がなくなる．インドの暑さの中では最大の御馳走は冷気である．研究所の中で2カ所だけ，図書室とコンピュータ室にだけ冷房が入っていて，暑さが耐えがたくなったときに入りこんでは窓の外の原野と藁ぶきの家々を眺めていた．

パリ5区のパンテオンの裏のコントルスカルプ広場のそばにパリジアナというホテルがあった．何度目かの滞在のある日，そこのオーナーのおばあさんがやってきた．私はたまたま2間つづきの部屋を借りていたのだが，パリ大学に来ているロシアの人でどうしても部屋が見つからない人がいるから片方を貸してほしい，とのことだった．2つ返事で引き受けると，心安く感じたのか，昔話を始めた．… 私はこの部屋で生まれてここで育ったのよ．家具もそのときのまま．ロシア革命の直後だったと思うけど，ロシアのエゴロッフという人が娘さんと2人で2年ほどここに住んだことがあったのよ．私は4, 5歳でよくその娘さんにボンボンをもらって遊んだわ．その後，香港の総督のお嫁さんになってもうなくなりましたけどね … 昔の写真をかたわらに，夢見るような口調だった．エゴロッフはルベーグ積分を学んだときに出てきた名前である．歴史を急に身近に感じた．そのホテルパリジアナも今はすでにない．その次にそのホテルを訪れたときは閉じる直前で私はほぼ最後の客となった．

数学史というほど大げさではないが，先人の小さなエピソードは心にとめておいてよいのではないだろうか？ 時代を超えて隣り合わせることがないともかぎらないのだから．

4. 耳学問

研究会などで発表を聞いて，その場で内容が分かることは私の場合には極めて少ない．分かるのはもともと分かっていたことであって，初めてのことは言葉の意味を理解するのが精一杯である．自分に知識がないのだからこれは当然のことである．長い間，数学は本や論文を読んで一人で身につけるもの，と思いこんでいた．そのため，自分の専門以外のセミナーや研究会には，どうせ分からないのだから話を聞くよりは文献を読んでいるほうがよいと思って出席しないことが多かった．もったいないことをしたものである．知識を体系的に吸収できる時期は学生時代しかない．それ以後は断片的な知識を自分で収集しながら組み立てていくしかない．役に立つか立たないかなどは最初からわかるものではない．そんなこともあるのか，とただ眺めているだけでもよい．また一言だけ印象に残る，ということがときどきある．これは後に自分の中で重要な発想につながる可能性があるから大切にしなくてはならない．

門前の小僧が習わぬ経を読む，とはよく言ったもので，意味の分からぬことでも繰り返し耳にするうちに全く無関係のことではなくなる．そこから考える糸口が出てくることもある．多少知識が増えてくると理解できる部分も増えてくる．話を聞きながらその背後の世界を想像したりできるようになると，セミナーに行くことが楽しくなった．



1992 年の谷口シンポジウムにて．左から R.B. メルローズ（MIT），筆者，I.M. シーガル（トロント大）．

そして特に外国で講演後の様子に注目していると，おおまかな内容もさることながら細かい計算の仕方まで徹底的に聞き出そうとする姿をよく見出すようになった．遠慮なくこの機会にすべて吸収してしまおうという態度と思えばよい．また講演者はそこまできちんと行うことが期待されているということでもある．

京都大学では毎週，火曜日に偏微分方程式のセミナーが行われており，セミナー終了後，近くの喫茶店で 1, 2 時間，数人で雑談をする習慣があった．私は専攻分野の関係からそこに行く機会は最初はなかったのだが，自分の研究に偏微分方程式論の手法を多く使うようになったころから頻繁に出席するようになった．といっても隅で小さくなってセミナーの中心の溝畑先生や他の方々の話に耳を傾けているだけであったのだがこれがずいぶん為になった．自分が分からないでいることで，多分こういうことではなかろうかと思って恐る恐る訊いてみると，それはこの分野の基礎知識であり，こういう文献を読めばよい，という答えをいただくこともしばしばあった．フランス暮らしの思い出，他の研究者たちのこと，新しい方向等，それまでに知らなかった世界への蒙を開かれる思いがした．この偏微分方程式セミナーでの多くの人たちの研究の思い出が「源泉」という文集に書かれている．そこからは人生の一時期を学問に捧げて悔いのなかった方々の真摯な思いが伝わって来て胸を打つ．もし身近に関係者がおられたら一度この文集を尋ねて読まれるのがよい．研究を続けて行くのは楽なことではない．それができるのはこのような瑞々しい感激があるからである．

5. 狭き門なのだろうか？

日本における大学院生数の増加と就職難は深刻な問題であり簡単に論ずるわけにはいかない．最近の日本の大学制度の改革はアメリカの制度を単純に真似ているように見える．これでいいのだろうか？ アメリカは面積も内容も広い国であって，大学，大学院も様々であり，また卒業後の選択肢も国内外ともに視野にいれて多数準備されている．また米国に来る人間も様々である．北欧の人たちは社会保障が発達しているからポスドクを続けることの問題は他の国より小さい．ドイツなどはよ

り深刻であるように感じられる．一口に米国では，などと簡単に言えるものではない．

以前から大学教員への門は狭かった．初めて論文を書いた頃に名前を知った人たちのその後の消息を聞くと，企業へ行った，と答えられることが多かった．心ならずも，という場合もあれば，積極的に新天地を目指す場合もあろう．MIT（マサチューセッツ工科大学）ですぐれた研究をしていた学生がロンドンに行き，数学の世界から金融の世界に去った，と聞いて現状ではやむを得ないと思いつつも寂しく感じていたのだが，最近，その彼がオーストラリアで大学の教員となり，研究活動を再開していることを知り，何となく楽しくなった．人生の日々を何のために使うかという問題は易しくはない．

最近，自分の研究に関連して東京都の調布市にある電通大の計算科学セミナーに出席することが多くなった．大学のみならず企業内で行われている数値計算も知ることができて世の中の実情を知らされる．英国の航空産業に直結した大学院に進まれた方のお話をうかがったことがある．午前中は講義，午後からは実習．半年ごとに試験を行い，実力が身につかなければ即退学．成績の良いものには奨学金を出し，卒業後はただちに力量を発揮できるようなシステムになっている，とのことであった．数学を学ぶ動機はいろいろあろう．理論の美しさに魅せられて数学に進む人が多いであろう．その場合にはいわゆる pure mathematics が対象となる．しかし現実の問題の理解が一歩進むことには理論の美しさを鑑賞するということとは異なった重みと充実感があるように思われる．自分の興味がどこにあるのかをよく見極める必要がある．それが難しいことではあるのだが．

また最近は自分自身の研究に関連してフィンランドの研究者たちとの交流が多くなった．フィンランドでは大学は決められた年限で卒業するもの，という感覚があまりないようである．数学の基礎とコンピュータを学ぶ．企業で働くうちにさらに高度な内容を知る必要が生じる．そこで大学に戻る．そのまま大学にいるものもおり，また企業に戻るものもおり，ということが自然に行われているとのことである．日本の現状を考えるよい材料ではないだろうか？

6. こんな本がある

『志学 数学』（シュプリンガー・ジャパン）という伊原康隆先生の本が出ている．学生時代から研究者として独り立ちできる頃まで，論文の書き方，発表の仕方，うまくいったとき，いかなかったとき，等，懇切丁寧に研究生活への助言が書いてあり味読に足る．特に自分の仕事が評価されたときなどはむしろ危険である，などとあるのは貴重な助言である．

あえてこの本に加えるならば私は岩波新書の『文章の書き方』（辰野和男著）を挙げたい．著者は朝日新聞の天声人語のコラムを書いておられた方である．材料を収集し，熟考し，余分なものをそぎ落とし，平明でかつ紋切型にならない文章にすることは容易ではない．普段からの準備と訓練が大切である．ここに書かれていることをそのまま研究に重ね合わせて読んでみれば納得できることが多いのではなかろうか．

（いそざき・ひろし，筑波大学大学院数理物質科学研究科）

視覚の科学と数学
ウェーブレットで探る錯視の世界
第2回

ウェーブレット・フィルタは脳内に存在するか？

新 井　仁 之

視覚と錯視の数学的な研究について講演をすると，どのようなきっかけでこのような研究を始めたのかと質問されることがたびたびある．今回はこの辺りのことから始めることにしたい．個人的な経験談ではあるが，実は前回予告した問い，

> ウェーブレット・フィルタは視覚系のどこに存在するのか？

に答えることにも深くつながっている．

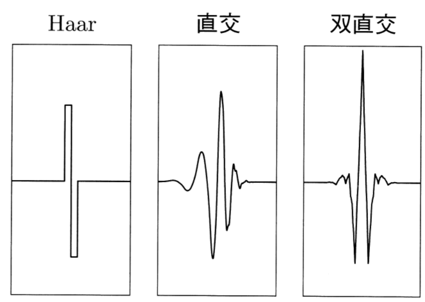


図 2.1　ウェーブレットのグラフ．

2.1 錯視の数学的研究

私はもともと実解析学という純粋数学の一分野を中心に研究していた．2001 年にあるきっかけからフーリエ解析の応用について調べていると，フーリエ解析が錯視の研究に応用されていることを知った．しかしウェーブレットならばもっと良い解析ができるのではないかと考え，ウェーブレットを用いた錯視発生のシミュレーションの計算機実験を始めた．ウェーブレットといってもその数は多い．例えば Haar ウェーブレット，Daubechies のコンパクト台[*1)]をもつ直交ウェーブレット，コンパクト台をもつ双直交ウェーブレットなど様々なウェーブレットがこれまでに考案されている（図 2.1）．そこで我々は，ともかくいろいろなウェーブレットを使って計算機実験を繰り返した．しかしどのウェーブレットを使っても思うようなシミュレーション結果は得られなかった．ところが，あるとき Cohen, Daubechies, Feauveau のコンパクト台をもつ双直交ウェーブレット[*2)]に最大重複法[*3)]とい

---

*1)　関数 f の台とは $\{x : f(x) \neq 0\}$ の閉包のことである．特にこの台がコンパクト集合になっているとき，コンパクト台をもつと言う．今の場合，f の定義域は有限次元ユークリッド空間なので，コンパクト台をもつことと，台が有界集合であることは同値である．

*2)　正確には，A. Cohen, I. Daubechies and J.-C. Feauveau, *Comm. Pure and Appl. Math.* **45** (1992), pp.485–560 の $k = 4$, $N = 4$, $\widetilde{N} = 4$ の場合．本稿では簡単のためにこれを単に双直交ウェーブレットと言うことにする．

*3)　G.P. Nason and B.W. Silverman, *Lect. Notes in Statistics*, **103** (1995), pp.281–299 参照．定常法とも言う．

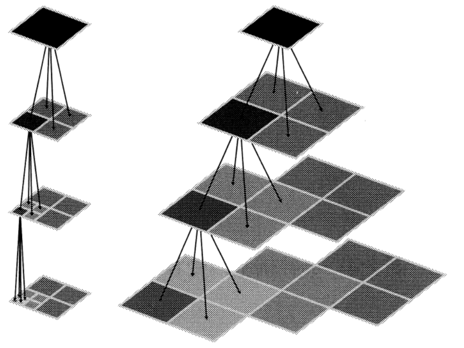


図 2.2　最大間引き法（左）と最大重複法（右）．最大間引き法では，レベルが上がるごとにデータを間引いて処理していくため，各レベルでのデータの総数は同じである．それに対して最大重複法ではデータを間引かずに処理するため，データの総数はレベルが上がるにつれて増加していく．

う方法を組み合わせて試みたところ，良い結果が得られた．通常のウェーブレットによる多重解像度分解では，レベルが一つ増えるたびにデータを間引くのに対して，最大重複法はデータを間引かない（図 2.2）．その代わりフィルタのほうをアップサンプリングする．通常のウェーブレットでデータを間引く理由はいくつかある．一つは間引くことにより，多重解像度分解が「基底」による分解となるからである．もう一つは，計算量を減らすためである．またウェーブレットのデータ圧縮への応用を考える場合，なるべくデータを減らしたいわけであるから，最大間引き法が望ましい．これに対して最大重複法はデータを間引いていないので，基底による分解よりも冗長な分解となり，計算量も多くなる．最大重複法は統計，時系列解析，ノイズ除去などに用いられていた．錯視のシミュレーションでは，最大間引き法であまり良い結果が得られなかったため，最大重複法を視覚の数理モデルに取り入れてみたのである．しかしこれらの組合せが，なぜ良いシミュレーションを与えるのか，その理由が当初わからなかった．そこで考えたことは，錯視は人間の視覚系が生み出すものであるから，視覚系の仕組みと何か深い関係があるに違いないということだった．そして視覚に関する神経科学でどのようなことがわかっているのかを調べてみることにした．その結果，大脳皮質のある細胞のもつ特性が，実は双直交ウェーブレットと非常に類似した機能をもっていることがわかった．まずはこの点について述べ，それから最大重複法が良いシミュレーションを与える理由として考えられることを述べる．そのために視覚がどのような仕組みをもっているのか本稿に関係する部分を簡単に紹介する．

2.2 視覚のメカニズム

私たちは外界からの視覚的情報を光*4) から獲得している．光はまず眼球の角膜，水晶体で光学的な処理がされ，網膜に到達する．網膜はおよそ 400 μm*5) の薄い膜である．網膜では細胞が連携して受容野を作り，これにより光の強弱（明暗）や波長の違い（色）が符号化され，その情報が活動電位として視神経を伝わって脳内へと伝送される．いわば網膜では光に関するアナログ的な情報を離散的な信号に変換しているとも言えるだろう．受容野という考え方は今後非常に重要になるので，網膜の神経節細胞の受容野を例にして説明しておく．

網膜はいくつかの層からなっている．眼底のほうから順に色素上皮，視細胞外節層，外顆粒層，外網状層，内顆粒層，内網状層，神経節細胞層と並んでいる．外界から眼球に入った光子はこれらの層を透過して，まず眼底のほうにある視細胞によりキャッチされる．視細胞には，杆体細胞と錐体細胞があるが，錐体細胞はさらに L 錐体，M 錐体，S 錐体の 3 種類に分けられる*6)．これらの細胞は興奮する光の波長域が異なり，色の違いの識別に大きく貢献している．色については別の回で扱うのでここでは立ち入らない．さて視細胞は双極細胞とシナプスを形成しており，さらに双極細胞は神経節細胞とシナプスを形成している．光子をキャッチした視細胞はその情報を双極細胞に伝

*4)　ここでは可視光のことを言う．可視光とは人が感知できる 380 nm（ナノメートル，1 m の 10 億分の 1）から 760 nm の波長域内の電磁波のことである．

*5)　1 μm（マイクロメートル）は 100 万分の 1 メートル．

*6)　それぞれ赤錐体，緑錐体，青錐体とも呼ばれる．

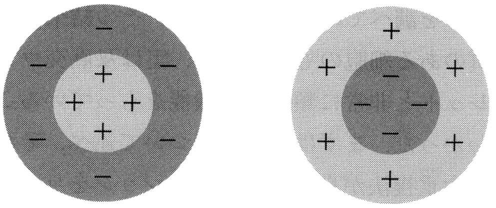


図 2.3　左が中心 ON 型，右が中心 OFF 型の神経節細胞の受容野．

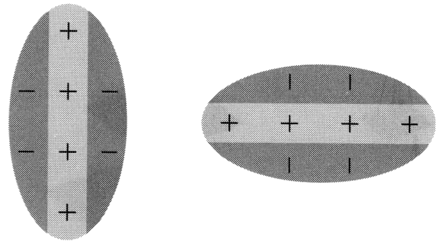


図 2.4　単純細胞の受容野の模式図．

達し，双極細胞はさらに神経節細胞に伝達する．なおその際に視細胞と双極細胞に水平的な結合をしている水平細胞，双極細胞と神経節細胞に水平的な結合をしているアマクリン細胞による信号のやり取りもある．神経節細胞からは軸策が伸びており，それらは集まって視神経となり，視交叉の後，視索を構成し，網膜で処理された光の情報を脳へ伝達する．

さて神経節細胞は周辺にある複数の視細胞に端を発する光の情報を受けている．その複数の視細胞がカバーする領域が神経節細胞の受容野である．1953 年に S.W. Kuffler はネコの神経節細胞がほぼ同心円型の互いに拮抗する領域からなる受容野を持っていることを報告した．その模式図が図 2.3 である．例えば図 2.3 左の場合，受容野の小さい円内（+ の印が付されている部分）に光の刺激が与えられた場合，神経節細胞は興奮する．しかし周辺の大きな同心円（− の印が付されている部分）に光の刺激が与えられると神経節細胞の発火活動が抑制される．一方逆の反応をする神経節細胞もあり，その模式図が図 2.3 右である．前者を中心 ON 型，後者を中心 OFF 型と言う*7)．この受容野により明暗の境界などに関する情報を符号化することができる．なお双極細胞のレベルで同心円型の拮抗型受容野が形成されていることも知られている．神経節細胞にはいくつかの種類があり，受容野が大きく，光のコントラストの感受性の良い M 型神経節細胞，受容野が小さく細かい解像度の情報処理に関係する P 型神経節細胞，そのどちらでもない非 P−非 M 型神経節細胞がある．色に関しては P 型では赤−緑，非 P−非 M 型は青−黄の色対立的な処理をしている．

網膜で符号化された光に関する情報の多くは脳内の外側膝状体，そして一部は上丘に伝送される．外側膝状体でも同心円形の受容野が形成されている．ここでは M 型，P 型，非 P−非 M 型神経節細胞などからの情報を仕分けし，大脳皮質の V1 野*8) と呼ばれる部分に伝送している．大脳皮質は機能に応じていくつかの領野に分類されており，V1 野はその一つである．視覚に関する部分は他に V2 野，V3 野，V4 野，MT 野，MST 野，IT 野などがあり，V1 野に到達した情報がいくつかの経路により，フィードバックもあるが次第に高次の領野に伝送されていく．

V1 野はこれらの視覚に関する領野の中では最初に様々な処理が行われる重要な部分である．1959 年から 1960 年代にかけて D.H. Hubel と T.N. Wiesel はネコやサルの V1 野（17 野）を研究した．その中で彼らは多くの細胞の受容野が方位選択性をもっていることを発見した．例えば図 2.4 のような模式図で表されるようなものがある．これにより方位が検出される．例えば垂直方向に適切な長さをもつ矩形状の光刺激の信号が，図 2.4 左の受容野上にくるようにすると，この受容野をもつ細胞は興奮する．しかし細胞が図 2.4 右の受容野をもつ場合は興奮しない．その代わり水平方向の矩形状の光刺激に反応するのである．図 2.4 のような受容野をもつ細胞を単純細胞と言う．

初めはこういった V1 野の細胞はエッジや線分の検出器の役割を果たしていると考えられた．し

*7)　なおこの他神経節細胞には ON/OFF 型のものもある．

*8)　有線野，17 野とも言われる．

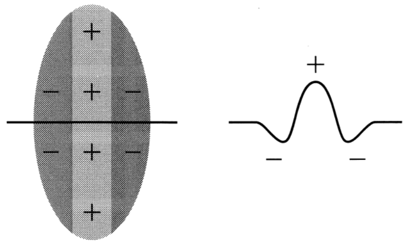


図2.5　単純細胞の機能のグラフ化.

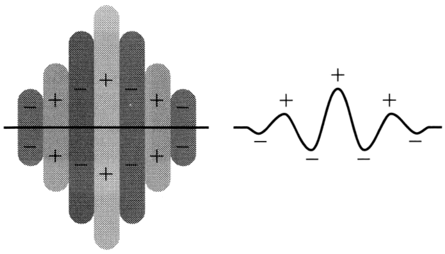


図2.6　Albrechtの実験によるデータ（De Valois, De Valois, *Spatial Vision*, Oxford Univ. Press, 1990）をもとにした模式図.

かし1978年にAlbrechtにより単純細胞の受容野がより複雑な形状をしていることが明らかにされた．例えば図2.4左の断面を機能的なグラフにすると図2.5のようになる．Albrechtはこのグラフがもう少し複雑なサイド・ローブをもつことを発見したのである．その模式図を描いておく（図2.6）．De Valoisはこういったことから，単純細胞が空間周波数に対する帯域通過フィルタの役割を果たしているという説を唱えた．

さてこのAlbrechtの結果を知り，我々は最大重複双直交ウェーブレットで良いシミュレーションが得られる理由がここにあることを見出した．つまり双直交ウェーブレット（図2.1右）は単純細胞と類似の形状を持っていたのである．このような神経科学的裏付けも得られたので，我々はさらに双直交ウェーブレットを用いた錯視と視覚の研究を進めることにした．

ところで，さらに調べていくと単純細胞の形状と類似する関数としてGabor関数やDOG関数が視覚の研究に使われていることを知った．Gabor関数やDOG関数は単純細胞を神経科学的なデータにフィットさせるには便利ではあるが，その台は実際の受容野と異なり無限遠まで広がっている．それに対して我々の使う双直交ウェーブレットはコンパクト台を有している．さらに形態的なことだけでなく，錯視の計算機シミュレーションや数理モデルの研究という観点においていくつかの大きな利点をもっていることもわかった．これらの利点については，我々の数理モデルの具体的な説明の中で適宜指摘していく．

最大重複法の利点にはまだ触れていないが，それは次節に述べることにする．

2.3 視覚の大域的情報処理

前節までは，我々がウェーブレットを用いた経緯，そしてどのようなウェーブレットを用いればよいかという問題について述べてきたが，それとほぼ同時に我々には取り組まねばならない課題があった．それは錯視を計算機上に発生させるため，ウェーブレット係数をどのように修飾していくかということである．この作業は，実は視覚の大域的・非線形的情報処理を数理モデル化することに繋がっていた．すでに紹介したように網膜，外側膝状体，V1野では受容野による情報処理が行われる．この部分については我々はコンパクト台をもつ双直交ウェーブレットを使った．これは局所的な情報処理であると言ってよいだろう．それ以外にV1野では，ニューロンの水平結合による受容野の範囲を超えた大域的・非線形的な情報処理も行われている．これにはいろいろなタイプのものが知られている（福田・佐藤[3]）．例えば，ある傾きの棒に反応するニューロンがあるとき，その反応が周囲の縞刺激によって抑制されること，そしてその抑制は縞刺激が棒の傾きと一致したときに最大になることなどが報告されている[*9]．また「広い範囲の視野にコントラストの高い一様なパターンの刺激があるような条件では，興奮性ネットワークの出力が低下するということを示唆する」（福田・佐藤[3] p.216）水平結合もある．

*9）　C. Blakemore and E.A. Tobin, 1972.（福田・佐藤[3]参照）.

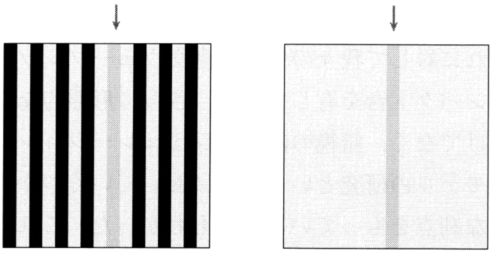


図 2.7　視覚の大域的処理によると考えられる錯視.

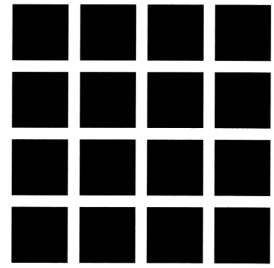


図 2.8　ヘルマン格子.

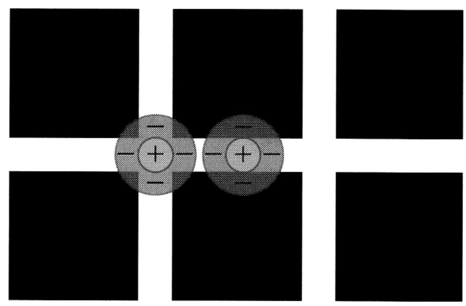


図 2.9　同心円型の拮抗型受容野によるヘルマン格子錯視の説明図.

ここで視覚の大域的な処理が影響していると考えられる錯視図形を作成したので載せておこう (図 2.7). 図 2.7 左と右のそれぞれに矢印で指したグレーのストライプがある. このストライプは同じ輝度をもっているが, 周囲に大きなコントラストのあるほう (左) が, ないほう (右) よりも薄く見える.

どのようにすれば, このような錯視をシミュレーションできるのであろうか. つまりどのようにこの種の情報処理を数学化し, 数理モデルに組み込めばよいのか. これは非常に難しい問題であり, これに関する我々の結果は次回詳しく述べることにする.

さて最大重複法の話に話題を移す. 実はこのような大域的処理を組み込んだ際に, 最大重複法を用いたほうが良いシミュレーション結果が得られたのである. 最大間引き法では大域的な処理をすると, 出力に期待していない歪みが現れてしまった. それが最大重複法を使ってみると, そのような歪みは現れなかった. その理由は, 最大間引き法によるウェーブレット分解が全く冗長性のない基底による分解であるため, 大域的処理をウェーブレット係数に施すと思わぬところに影響が生じてしまったと考えられる.

2.4 大脳皮質での情報処理と錯視

最後に, 今回述べてきたことにも関連する錯視の話題を述べておきたい. ヘルマン格子錯視 (図 2.8) についてである. この錯視については前回の記事を参照してほしいが, 白い路の交差点の部分に存在しない薄暗いスポットが見えるというものである. ヘルマン格子錯視は 1870 年に L. Hermann により発見されて以降, なぜ薄暗いスポットが見えてしまうのか, その理論的な説明を与える研究が行われてきた. 特に同心円型の拮抗型受容野の機能による側抑制に基づいた説明 (Baumgartner, 1960) が非常に説得力のあるものとして受け入れられた. それを簡単に説明しておこう.

例えば図 2.9 のような ON 型の同心円形の受容野を考える. これが白い路の交差点の中央に位置する場合と交差点でない部分に位置する場合を比較してみよう. 細胞の興奮を抑制する領域 (− の部分) に与えられる明るさの刺激が, 前者の場合は水平の道の部分と垂直の道の部分の両方がある. これに対して後者の場合は水平の道の部分のみである. すなわち, 前者のほうが細胞の興奮がより強く抑制されていることになる. このことから, 白い路の交差点の部分が実際よりもより薄暗く見える. これが同心円型の受容野による説明である.

しかし近年, 同心円型の拮抗型受容野による情報処理では説明の難しい現象も発見された. 例え

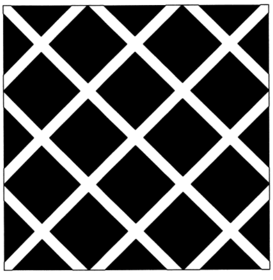


図2.10　斜めにしたヘルマン格子.

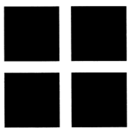


図2.11　格子の数の少ないヘルマン格子.

ば，ヘルマン格子を斜めにすると白い路の格子点に現れる暗いスポットがそれほど暗くはなくなる (Spillmann 1971, Spillmann and Levin 1971). すなわち錯視量が減る．このことを確認するため，ヘルマン格子を斜めにした図形を示す（図 2.10）. しかし同心円型の受容野のみの議論では，円対称性からこの現象の説明は困難である．1984 年には Wolfe がヘルマン格子の格子の数が錯視量に影響し，例えば格子の数が多いほうが錯視量が大きいことを示した．格子の数が少ないヘルマン格子（図 2.11）と図 2.8 を比べると，このことが確認できるであろう*10)．先に述べたヘルマン格子錯視の説明をこの現象の説明に適用することはできない．なぜならばその説明は，同心円型の受容野の内側のみに関するもので，受容野の外側の状況には関係していないからである．

こういったことから，ヘルマン格子錯視が起こる要因として網膜や外側膝状体での処理もあるだろうが，大脳皮質での情報処理も絡んでいることが指摘されている（Spillmann, 1994).

さてここで問題となることは，

具体的にどのような大脳皮質での情報処理がどのようにこれらの現象に関係しているのか

ということであろう．この問題を考究する一つの方法は，大脳皮質での情報処理の数理モデル化を行い，その数理モデルが実際に3種類のヘルマン格子（図 2.8, 2.10, 2.11）の錯視量の違いを出力するかどうかを調べることである．大脳皮質のある情報処理をモデル化して数理モデルに組み込み，もしその数理モデルがこれらのヘルマン格子の錯視量の変化を計算してくれれば，その情報処理がこの現象の要因になっていることが数学的に示されたことになる．これについては次回，V1 野での大域的・非線形的情報処理の数理モデル化を述べる際に我々の結果を紹介したい．

*10)　ただし図 2.11 を見る場合は視点を少し中心からずらしてほしい．実は中心窩の部分ではヘルマン格子錯視は現れない．このことについては次回詳しく述べる．

2.5 おわりに

今回は視覚系の中の細胞には，ウェーブレット・フィルタと類似の情報処理をするものが存在するということを述べた．次回は視覚系の大域的・非線形的情報処理の数理モデル化，そしてその錯視研究への応用に関する我々の結果をいくつかの錯視を紹介しながら述べる．

参考文献

1) H. Arai, *Interdisciplinary Information Sciences*, **11** (2005), 177–190.
2) ベアー，コノーズ，パラディーソ著，加藤宏司，後藤薫，藤井聡，山崎良彦監訳『神経科学—脳の探究—』，西村書店.
3) 福田淳，佐藤宏道，『脳と視覚—何をどう見るか—』，共立出版.

（あらい・ひとし，
東京大学大学院数理科学研究科/科学技術振興機構さきがけ）

特　集（2008 年 10 月号予告）

ポアンカレ

知の巨人が放った創造性の至宝

ポアンカレの水晶玉	小島　定吉
ポアンカレの哲学	吉田　夏彦
ポアンカレと保型形式	寺田　俊明
ポアンカレと非ユークリッド幾何学	松崎　克彦
ポアンカレと力学系	金　英子
ポアンカレと位相幾何学	佐藤　肇
ポアンカレと天体力学	谷川　清隆
時計仕掛けの地図	山田　澄生
ポアンカレと数学的創造	山下　純一
［コラム］	塩谷　隆
［インタビュー］	小島　定吉

本体 952 円

特　集（2008 年 8 月号）

数の魅力

秘められた深遠なる美と無限

巻頭言	足立　恒雄
一と多　西洋哲学における存在論的思想	佐藤真理人
ライプニッツと数，量，無限	林　知宏
ピュタゴラス数	寺井　伸浩
和算における円周率	竹之内　脩
四元数	公田　藏
アボガドロ数とその今日的省察	伊藤　公久
Pisot 数	秋山　茂樹
フィボナッチ数と超越数	塩川　宇賢
3 とクォーク	大貫　義郎
［インタビュー］「『数』の発展史」と「新しい数学」	足立　恒雄
《連載》視覚の科学と数学　その 1	新井　仁之
目で見て学ぶ量子力学　その 4	外村　彰
《物理の道しるべ》第 3 回	風間　洋一

本体 952 円

編集後記

今回のテーマは，ニュートンの再来と言われるウィッテンによって提唱されたものですが，20 年の時が刻んだ学問の発展を味わって頂ければ幸いです．今年はフランス高等科学研究所創立 50 周年ということで，特集記事にも登場する鬼才コンセビッチが秋に来日予定だそうです．

また，次号は歴史を更に遡って，トポロジーの先駆者ポアンカレの特集です．本号に引き続きお楽しみに．　(N)

＊　　＊

今回の特集は如何でしたでしょうか．菅野先生が巻頭で述べられていることですが，トポロジカル弦理論という言葉そのものが目立つようになったのは，ここ十数年のことでまだ若い理論のようです．

また，今回登場した人物の一人であるコンツェヴィッチも同様に若い方のようです．若い理論の牽引役の一人が若手ということで，これからの進展が大変楽しみです．　(R)

数　理　科　学　9月号

2008 年 9 月 1 日発行

数理科学編集部　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 ⓒ 株式会社 **サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁